

Olivier Brinon

**REPRÉSENTATIONS p -ADIQUES CRISTALLINES
ET DE DE RHAM DANS LE CAS RELATIF**

O. Brinon

LAGA, Institut Galilée, Université Paris-Nord, 99 avenue J.B. Clément. 93430 Villetaneuse, France.

E-mail : `brinon@math.univ-paris13.fr`

Classification mathématique par sujets (2000). — 11F80, 11S25, 14F30.

Mots clefs. — Représentations galoisiennes, périodes p -adiques, cohomologie galoisienne, cohomologie cristalline, F -isocristaux.

REPRÉSENTATIONS p -ADIQUES CRISTALLINES ET DE DE RHAM DANS LE CAS RELATIF

Olivier Brinon

Résumé. — On définit et étudie les notions de faisceaux p -adiques lisses de de Rham et cristallins sur des bases p -adiques « convenables ». On introduit pour cela des anneaux de périodes p -adiques (analogues à ceux de J.-M. Fontaine), qui permettent de leur associer des invariants de nature différentielle. Dans le cas de bonne réduction, on obtient un foncteur pleinement fidèle de la catégorie des faisceaux p -adiques lisses cristallins dans celle des F -isocristaux filtrés sur la fibre spéciale.

Abstract. — We define and study the notions of de Rham and crystalline smooth p -adic sheaves over "suitable" p -adic bases. To do this, we introduce p -adic period rings (analogous to those of J.-M. Fontaine), which are used to associate differential invariants to them. In the good reduction case, we obtain a fully faithful functor from the category of crystalline smooth p -adic sheaves in that of filtered F -isocrystals on the special fiber.

TABLE DES MATIÈRES

1. Introduction	1
2. Notations, premières propriétés	5
3. L’anneau C	9
3.1. Propriétés galoisiennes.....	9
3.2. Platitude.....	13
3.3. Localisation.....	14
4. Rappels sur l’anneau B_{HT} de Hyodo	19
4.1. L’anneau B_{HT} et sa cohomologie galoisienne.....	19
4.2. Finitude de $D_{\text{HT}}(V)$	21
5. L’anneau B_{dR}	25
5.1. Construction.....	25
5.2. Filtration de B_{dR}	28
5.3. Connexion de B_{dR}	32
5.4. Platitude.....	33
6. L’anneau B_{cris}	35
6.1. Construction.....	35
6.2. Relations avec B_{dR}	39
6.3. Platitude.....	47
7. (φ, ∇)-modules filtrés	51
7.1. La catégorie des (φ, ∇) -modules filtrés.....	51
7.2. Changement de Frobenius.....	56
8. Représentations p-adiques	59
8.1. Représentations discrètes, représentations non ramifiées.....	59
8.2. Représentations de de Rham, représentations cristallines.....	61
8.3. Structures supplémentaires sur $D_{\text{dR}}(V)$ et $D_{\text{cris}}(V)$	67
8.4. \mathcal{G}_R -régularité de B_{cris} et de B_{dR}	69
8.5. Pleine fidélité du foncteur D_{cris} , admissibilité.....	72
8.6. Cas des caractères.....	73
9. Appendices	77
9.1. Rappels et compléments sur les revêtements presque étales.....	77
9.2. I -platitude.....	79
9.3. Calculs de cohomologie cristalline.....	82
9.4. Cas d’une base lisse.....	85
Bibliographie	87

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

Ce mémoire est la suite de [10], où les notions de représentations p -adiques de de Rham et cristallines ont été définies et étudiées dans le cas d'un trait complet de caractéristique mixte à corps résiduel imparfait. L'objectif est ici de faire de même pour des bases plus générales.

Soit K un corps de valuation discrète complet, de caractéristique 0, à corps résiduel k de caractéristique p . On note \mathcal{O}_K l'anneau des entiers de K et v la valuation normalisée par $v(p) = 1$. On fixe une clôture algébrique \overline{K} de K et on pose $\mathcal{G}_K = \text{Gal}(\overline{K}/K)$. La valuation v s'étend de façon unique en une valuation $v: \overline{K} \rightarrow \mathbf{Q} \cup \{\infty\}$. On note C_K le complété de \overline{K} pour la topologie définie par v . C'est un corps algébriquement clos sur lequel l'action de \mathcal{G}_K s'étend par continuité. On note $\chi: \mathcal{G}_K \rightarrow \mathbf{Z}_p^\times$ la caractéristique cyclotomique et, si M est un \mathcal{G}_K -module et n un entier, $M(n)$ le module M sur lequel l'action de \mathcal{G}_K est multipliée par χ^n (« tordu à la Tate »).

Supposons k parfait. Dans [46], Tate a prouvé que si G est un groupe p -divisible (*i.e.* de Barsotti-Tate) sur \mathcal{O}_K , on a une décomposition de \mathcal{G}_K -modules

$$\text{Hom}_{\mathbf{Z}_p}(\text{T}_p(G), C_K) = (t_{G^\flat} \otimes_K C_K) \oplus (t_G^\vee \otimes_K C_K(-1))$$

où $\text{T}_p(G)$ désigne le module de Tate de G et t_G (resp. t_{G^\flat}) l'espace tangent de G (resp. du dual de G). Il a conjecturé que la cohomologie étale de toute variété propre et lisse sur K donne lieu à une décomposition analogue (de Hodge-Tate), *i.e.* que $\text{H}_{\text{ét}}(X \otimes_K \overline{K}, \mathbf{Q}_p) \otimes_{\mathbf{Q}_p} C_K$ est isomorphe, en tant que \mathcal{G}_K -module, à une somme directe de $C_K(n)$ pour des entiers n convenables (les poids de Hodge-Tate), ce qui a été finalement démontré par Faltings (*cf.* [20, Chapter III, Theorem 4.1]).

La notion de représentation de Hodge-Tate a été raffinée par Fontaine qui, en construisant des anneaux de périodes (*cf.* [27], [28]), associe à toute représentation p -adique V des invariants $\text{D}_{\text{cris}}(V)$, $\text{D}_{\text{st}}(V)$, $\text{D}_{\text{dR}}(V)$ et $\text{D}_{\text{HT}}(V)$ qui sont des espaces vectoriels munis de structures supplémentaires. Cela permet d'établir une hiérarchie dans la catégorie des représentations p -adiques de \mathcal{G}_K :

$$\begin{aligned} \{\text{représentations cristallines}\} &\subset \{\text{représentations semi-stables}\} \\ &\subset \{\text{représentations de de Rham}\} \subset \{\text{représentations de Hodge-Tate}\} \subset \{\text{représentations } p\text{-adiques}\}. \end{aligned}$$

Il a de plus conjecturé que la cohomologie étale des variétés propres et lisses sur K est de de Rham, et même semi-stable (resp. cristalline) pour les variétés à réduction semi-stable (resp. bonne réduction). En outre, l'invariant $\text{D}_{\text{dR}}(V)$ correspondant s'identifie à la cohomologie de de Rham de X , et $\text{D}_{\text{st}}(V)$ (resp. $\text{D}_{\text{cris}}(V)$) à la cohomologie log-cristalline (resp. cristalline) de la fibre spéciale de X dans le cas de réduction semi-stable (resp. bonne réduction). Ces conjectures ont été démontrées par Fontaine-Messing (*cf.* [25]) pour des variétés définies sur un corps absolument non ramifié, ayant bonne réduction et de dimension inférieure à p ; par Faltings ([21, Theorems 5.6 & 8.1]) pour le cas de Rham et cristallin, puis par Hyodo-Kato et par Tsuji dans le cas semi-stable (*cf.* [48, Theorem 0.2]). Fontaine-Messing, Hyodo-Kato et Tsuji utilisent des méthodes syntomiques, alors que Faltings utilise la théorie des « revêtements presque étales » (plus proche des méthodes de Tate). C'est ce dernier point de vue qui sera utilisé dans ce travail.

Par ailleurs, Colmez et Fontaine ont prouvé (*cf.* [14, Théorème A]) que le foncteur D_{st} (resp. D_{cris}) induit une équivalence entre la catégorie des représentations semi-stables (resp. cristallines) et la catégorie des (φ, N) -modules (resp. φ -modules) filtrés faiblement admissibles. Depuis, plusieurs preuves différentes de ce résultat ont été données, par Colmez ([15]), Berger ([5]) et Kisin ([41]).

Revenons au cas où k est quelconque (*i.e.* plus parfait *a priori*). Hyodo a observé qu'en général, la cohomologie étale des variétés abéliennes sur K n'est pas de Hodge-Tate dans le sens donné plus haut (*cf.* [36, Theorem 3]). Par exemple, si \mathcal{A} est une variété abélienne sur K à réduction stable dont la composante connexe de la fibre spéciale

est une puissance du groupe multiplicatif, c'est le cas si et seulement si \mathcal{A} est définie sur $W(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} k^{p^n})[p^{-1}]$. Il a donné une définition correcte de la notion de représentation p -adique de Hodge-Tate dans [37, 0.2] (en fait, il l'a fait dans un cadre beaucoup plus général, sur une base qui n'est pas un corps). Comme rappelé au début de cette introduction, le cas des représentations de de Rham et cristallines a été traité (lorsque k admet une p -base finie) dans [10], où est prouvé le fait que le foncteur D_{cris} induit une équivalence entre la catégorie des représentations cristallines et la catégorie des F -isocristaux filtrés sur K faiblement admissibles (généralisant le théorème de Colmez-Fontaine évoqué plus haut).

Passons maintenant au cas général. Si X est une variété (formellement) lisse sur K , on s'intéresse aux faisceaux p -adiques lisses sur $X_{\text{ét}}$. Les notions étant locales, on se place dans le cas où $X = \text{Spec}(R[p^{-1}])$ avec R une \mathcal{O}_K -algèbre « convenable ». Comme on l'a évoqué plus haut, le cas Hodge-Tate a été traité par Hyodo dans [37], en s'appuyant sur des travaux de Faltings. Le cas de Rham a été abordé par Wintenberger [49] dans le cas des schémas abéliens, et Tsuzuki dans le cas général. Remarquons aussi que certains anneaux de périodes « relatifs » ont été utilisés par Faltings et Tsuji dans leurs preuves des théorèmes de comparaison. On n'aborde pas la théorie semi-stable dans ce mémoire. C'est l'objet d'un travail en cours de Tsuji.

Pour la théorie cristalline, supposons que X a bonne réduction. On construit un foncteur D_{cris} de la catégorie des faisceaux p -adiques lisses sur $X_{\text{ét}}$ dans la catégorie des F -isocristaux sur le complété formel de X le long de sa fibre spéciale, munis d'une filtration sur l'évaluation en $X \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbf{F}_p$. Il induit un foncteur pleinement fidèle sur la catégorie des représentations cristallines (celles pour lesquelles le morphisme des périodes est un isomorphisme). Lorsque X est de dimension non nulle, la description de l'image essentielle est subtile, on n'a que des résultats partiels.

Le cadre de ce travail, qui est celui de [1] et [2], est le suivant. Soit d un entier, T_1, \dots, T_d des indéterminées et $R^0 = \mathcal{O}_K\{T_1^{\pm 1}, \dots, T_d^{\pm 1}\}$ le séparé complété de $\mathcal{O}_K[T_1^{\pm 1}, \dots, T_d^{\pm 1}]$ pour la topologie p -adique. On se donne un anneau \tilde{R} obtenu à partir de R^0 en itérant les opérations suivantes :

- (ét) complétion p -adique d'une extension étale ;
- (loc) complétion p -adique d'une localisation ;
- (comp) complétion par rapport à un idéal contenant p .

On suppose en outre que $\mathcal{O}_K[T_1^{\pm 1}, \dots, T_d^{\pm 1}] \rightarrow \tilde{R}$ est à fibres géométriquement régulières ou que \tilde{R} est de dimension de Krull inférieure à 2, et que $k \rightarrow \tilde{R} \otimes_{\mathcal{O}_K} k$ est géométriquement intègre (ces hypothèses assurent que le théorème de pureté de Faltings s'applique, cf. [1, Theorems 5.1 & 5.11]).

Soit E_R une clôture algébrique de $\text{Frac}(\tilde{R})$. On note \overline{R} la réunion des sous- \tilde{R} -algèbres finies S de E_R telles que $S[p^{-1}]$ est une extension étale de $\tilde{R}[p^{-1}]$. On se donne une sous- \tilde{R} -algèbre finie R de E_R telle que :

- R est normale et plate sur \tilde{R} ,
- $R[p^{-1}]$ est étale sur $\tilde{R}[p^{-1}]$,

(en particulier $R \subset \overline{R}$) et on pose $\mathcal{G}_R = \text{Gal}(\overline{R}[p^{-1}]/R[p^{-1}])$.

Dans [1], la théorie des (φ, Γ) -modules et l'équivalence de catégories de [26] entre la catégorie des représentations p -adiques de \mathcal{G}_K et la catégorie des (φ, Γ) -modules étales ont été généralisées aux représentations p -adiques de \mathcal{G}_R . De plus, le théorème de Cherbonnier-Colmez (cf. [13, Proposition III.5.1]), qui affirme que les représentations p -adiques de \mathcal{G}_K sont « surconvergentes » est valide dans ce contexte (cf. [2, Théorème 4.40]). Rappelons que le résultat de Cherbonnier-Colmez est un ingrédient crucial dans les formules de réciprocité explicites (cf. [3]).

Dans ce travail, on construit et on étudie des anneaux de périodes de de Rham et cristallines, ainsi que les invariants associés aux représentations p -adiques de \mathcal{G}_R qu'ils permettent de définir. Comme il a été dit plus haut, on prouve en particulier que dans le cas de bonne réduction, le foncteur D_{cris} induit un foncteur pleinement fidèle sur la catégorie des représentations cristallines à valeurs dans la catégorie des F -isocristaux filtrés sur $R[p^{-1}]$. Décrivons les différentes parties de ce mémoire.

Après avoir fixé les notations de base et donné quelques propriétés de l'anneau R , on étudie en détail les propriétés de l'anneau $C = \widehat{\tilde{R}[p^{-1}]}$ (où $\widehat{\tilde{R}}$ désigne le séparé complété de \tilde{R} pour la topologie p -adique), qui constitue l'analogue du corps C_K pour l'anneau R . Remarquons qu'en général, l'anneau C est loin d'être intègre ou noethérien, ce qui en rend l'étude délicate. On en donne les propriétés galoisiennes et on montre qu'il est fidèlement plat sur $R[p^{-1}]$ (théorème 3.2.3). On explique ensuite comment on peut le « localiser », et le plonger dans un produit de corps de la forme C_K . Les plongements qui s'en déduiront au niveau des anneaux de périodes seront cruciaux dans la suite.

Les deux parties qui suivent sont consacrées à la construction et l'étude des anneaux de périodes B_{dR} et B_{cris} respectivement, comme c'est fait dans [27] dans le cas « classique » (*i.e.* absolu). On en donne les propriétés

galoisiennes (sous l'hypothèse de bonne réduction pour B_{cris}) et on les munit de structures supplémentaires : filtration pour B_{dR} , opérateur de Frobenius pour B_{cris} , et connexion. Remarquons d'ailleurs que les sections horizontales fournissent d'autres anneaux de périodes B_{dR}^{∇} et B_{cris}^{∇} , qui sont ceux qu'on trouve en copiant les constructions habituelles. On explicite les liens entre B_{dR} et B_{cris} , en particulier, on a la « suite exacte fondamentale » (proposition 6.2.23), qui permet de prouver la pleine fidélité du foncteur D_{cris} sur la catégorie des représentations cristallines évoquée plus haut. On démontre en outre des propriétés de fidèle platitude de B_{dR} et de B_{cris} (théorèmes 5.4.1 et 6.3.8), qui sont utiles pour montrer que les catégories des représentations de de Rham et celle des représentations cristallines sont des sous-catégories *tannakiennes* de la catégorie des représentations p -adiques de \mathcal{G}_R (théorème 8.4.2).

Dans le chapitre suivant, essentiellement constitué de définitions, on s'intéresse aux (φ, ∇) -modules filtrés. Ils forment une catégorie dans laquelle le foncteur D_{cris} (construit plus loin) prend ses valeurs.

On applique ensuite tout ce qui précède aux représentations p -adiques de \mathcal{G}_R . Après avoir traité le cas des représentations non ramifiées, on définit les notions de représentation de de Rham et de représentation cristalline, grâce aux foncteurs D_{dR} et D_{cris} . On étudie plus particulièrement le cas des caractères, et on prouve la \mathcal{G}_R -régularité des anneaux B_{dR} et B_{cris} (cf. [10, Remarque 3.1.9]). On montre ensuite la pleine fidélité du foncteur D_{cris} et on s'intéresse à son image essentielle. Comme il a été dit plus haut, les résultats ne sont que fragmentaires : seul le cas des caractères est bien compris, et il semble que dans le cas général, la notion de (φ, ∇) -module filtré admissible ne coïncide pas avec celle de (φ, ∇) -module filtré faiblement admissible point par point.

Enfin, on donne en appendice quelques compléments sur les revêtements presque étales de Faltings, puis une version affaiblie de la presque platitude (qui permet de travailler avec des propriétés d'annulation par des idéaux qui ne sont pas égaux à leur carré), et on finit en explicitant l'origine « cristalline » de l'anneau A_{cris} .

Bien sûr, la plupart des énoncés sont des généralisations de ceux de [10]. Les preuves sont parfois beaucoup plus techniques (par exemple la proposition 8.2.4 et ses corollaires). D'autres sont par contre assez proches ; je les ai néanmoins incluses lorsque cela m'a semblé utile.

Ce travail est une version améliorée d'une partie de ma thèse. Je remercie mon directeur, Jean-Marc Fontaine, pour son aide ses conseils. Je suis aussi reconnaissant envers Ahmed Abbes, Fabrizio Andreatta, Katsuya Kato, Alban Moreau et Takeshi Tsuji pour les nombreuses discussions que j'ai eues avec eux, qui m'ont été très utiles.

Ce travail a été rédigé alors que j'étais post-doctorant au Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata de Padoue et à la Graduate School of Mathematical Sciences de Tokyo, dans le cadre du Marie Curie Research Training Network (Réseau de Géométrie Algébrique et d'Arithmétique Européen). Je remercie ces trois institutions, ainsi que Francesco Baldassarri et Takeshi Saito pour leur accueil et les conditions de travail excellentes dont j'ai bénéficié grâce à eux.

CHAPITRE 2

NOTATIONS, PREMIÈRES PROPRIÉTÉS

On reprend les notations de l'introduction. On suppose désormais que K est algébriquement clos dans $R[p^{-1}]$ (cela n'est pas une restriction). Il en résulte que \mathcal{G}_K est un quotient de \mathcal{G}_R . On étend le caractère cyclotomique en $\chi: \mathcal{G}_R \rightarrow \mathbf{Z}_p^\times$. Rappelons par ailleurs que les anneaux \tilde{R} et R sont séparés et complets pour la topologie p -adique, noethériens, intègres et normaux.

Proposition 2.0.1. — *Le Frobenius $\overline{R}/p\overline{R} \rightarrow \overline{R}/p\overline{R}$ est surjectif.*

Démonstration. — Soit $\alpha \in \overline{R}$. Posons $P_\alpha(X) = X^{p^2} - pX - \alpha$. Une racine β de P_α dans E appartient à \overline{R} . En effet, on a $P'_\alpha(X) = -p(1 - pX^{p^2-1})$, et donc $P'_\alpha(\beta) \in \tilde{R}[\beta][p^{-1}]^\times$ car $\tilde{R}[\beta]$ est complet pour la topologie p -adique (en effet, $\tilde{R}[\beta]$ est un \tilde{R} -module de type fini complet pour la topologie p -adique, car \tilde{R} est noethérien et complet pour la topologie p -adique). La $\tilde{R}[p^{-1}]$ -algèbre $\tilde{R}[\beta][p^{-1}]$ est donc étale (cf. [43, II proposition 8]), et $\beta \in \overline{R}[p^{-1}]$. Comme β est entier sur \tilde{R} , on a bien $\beta \in \overline{R}$. Enfin, on a $\beta^{p^2} \equiv \alpha \pmod{p\overline{R}}$. \square

Notons $W = W(k)$ l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans k et $K_0 = W[p^{-1}]$ son corps des fractions. On fixe une uniformisante ϖ de K , et on note $E \in W[X]$ le polynôme minimal de ϖ sur K_0 . C'est un polynôme d'Eisenstein de degré $e = [K: K_0]$.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on choisit $\varepsilon^{(n)} \in \overline{K}$ une racine p^n -ième de l'unité, de sorte que $(\varepsilon^{(n+1)})^p = \varepsilon^{(n)}$. Si L est une extension de K_0 contenue dans \overline{K} , on note \mathcal{O}_L son anneau des entiers. Si $n \in \mathbf{N}_{>0}$, on pose $L_n = L[\varepsilon^{(n)}]$ et $L_\infty = \bigcup_{n \in \mathbf{N}_{>0}} L_n$ l'extension cyclotomique de L . C'est une extension galoisienne de L , dont le groupe de Galois $\Gamma_L = \text{Gal}(L_\infty/L)$ s'identifie, via le caractère cyclotomique χ , à un sous-groupe ouvert de \mathbf{Z}_p^\times .

Pour $n \in \mathbf{N}$, on choisit $T_i^{(n)} \in \overline{R}$ une racine p^n -ième de T_i , de sorte que $(T_i^{(n+1)})^p = T_i^{(n)}$ (c'est possible car T_i est inversible dans \tilde{R}). On pose $R'_n = R[T_1^{(n)}, \dots, T_d^{(n)}]$ et on note R_n le normalisé de $R'_n \cdot \mathcal{O}_{K_n}$ dans \overline{R} (on a $R_n[p^{-1}] = (R'_n \cdot \mathcal{O}_{K_n})[p^{-1}]$) et $R_\infty = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} R_n$. En particulier, on a $R_\infty \subset \overline{R}$.

On pose $\Gamma_R = \text{Gal}(R_\infty[p^{-1}]/R[p^{-1}])$ et $\mathcal{H}_R = \text{Ker}(\mathcal{G}_R \rightarrow \Gamma_R)$. Le groupe Γ_R s'insère dans la suite exacte

$$1 \rightarrow \tilde{\Gamma}_R \rightarrow \Gamma_R \rightarrow \Gamma_K \rightarrow 1$$

où $\tilde{\Gamma}_R = \text{Gal}(R_\infty[p^{-1}]/R \cdot \mathcal{O}_{K_\infty}[p^{-1}]) = \text{Ker}(\chi)$ s'identifie à un sous-groupe d'indice fini de $\tilde{\Gamma}_{\tilde{R}} = \bigoplus_{i=1}^d \mathbf{Z}_p \gamma_i$ où γ_i est défini par :

$$\gamma_i \left(T_j^{(n)} \right) = \begin{cases} \varepsilon^{(n)} T_i^{(n)} & \text{si } j = i \\ T_j^{(n)} & \text{si } j \neq i \end{cases}$$

Si $g \in \Gamma_R$, on a les relations $g\gamma_i g^{-1} = \gamma_i^{\chi(g)}$ pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$: Γ_R -module $\tilde{\Gamma}_R$ est donc isomorphe à $\mathbf{Z}_p(1)^d$. On choisit γ_0 un générateur de la partie libre de $\text{Gal}(R_\infty[p^{-1}]/R_\infty[p^{-1}])$.

On choisit R_0 une sous- $W\{T_1^{\pm 1}, \dots, T_d^{\pm 1}\}$ -algèbre de \tilde{R} fermée pour la topologie p -adique telle que l'homomorphisme $R_0/pR_0 \rightarrow \tilde{R}/\varpi\tilde{R}$ est un isomorphisme, et telle que pour tout $n \in \mathbf{N}$, la $\mathbf{Z}/p^{n+1}\mathbf{Z}$ -algèbre $R_0/p^{n+1}R_0$ est formellement lisse. C'est possible car \tilde{R} est obtenu à partir de R^0 en itérant les opérations (ét), (loc) et (comp), et R_0 est obtenu à partir de $W\{T_1^{\pm 1}, \dots, T_d^{\pm 1}\}$ en itérant les opérations (ét), (loc) et (comp). On fixe un relèvement $\sigma: R_0 \rightarrow R_0$ du Frobenius $x \mapsto x^p$ sur $\tilde{R}/\varpi\tilde{R}$. Bien sûr, un tel relèvement n'est pas unique. Remarquons que l'application naturelle $R_0[\varpi] \rightarrow \tilde{R}$ est un isomorphisme (car c'en est un modulo ϖ).

Notons (BR) la condition $R = \tilde{R}$. Il s'agit d'une hypothèse de bonne réduction qui sera supposée remplie lorsqu'on regardera la théorie cristalline.

Pour $c \in v(K_\infty^\times)$, on notera p^c un élément de valuation c dans K_∞ .

Pour $q \in \mathbf{N}$, notons $\widehat{\Omega}_R^q = \varprojlim_n \Omega_{R/\mathbf{Z}}^q / p^n \Omega_{R/\mathbf{Z}}^q$ le séparé complété du module des différentielles $\Omega_{R/\mathbf{Z}}^q$ (c'est le module des différentielles continues de R relativement à \mathbf{Z}).

Proposition 2.0.2. — On a $\widehat{\Omega}_{R_0}^1 = \bigoplus_{i=1}^d R_0 \, d \log (T_i)$ et $\widehat{\Omega}_{R_0}^q = \bigwedge_{R_0}^q \widehat{\Omega}_{R_0}^1$ pour $q \in \mathbf{N}$. Par ailleurs, le noyau et le conoyau de l'application naturelle $\widehat{\Omega}_{R_0}^q \otimes_{R_0} R \rightarrow \widehat{\Omega}_R^q$ sont tués par une puissance de p . En particulier, on a

$$\widehat{\Omega}_R^q[p^{-1}] = \bigwedge_{R[p^{-1}]} \left(\bigoplus_{i=1}^d R[p^{-1}] \, d \log (T_i) \right).$$

Démonstration. — Montrons par récurrence sur $n \in \mathbf{N}_{>0}$ que $\Omega_{R/\mathbf{Z}}^1 / p^n \Omega_{R_0/\mathbf{Z}}^1 = \bigoplus_{i=1}^d (R_0 / p^n R_0) \, d \log (T_i)$. Le cas $n = 1$ résulte du fait que T_1, \dots, T_d est une p -base de $R_0 / p R_0 = \widetilde{R} \otimes_{\mathcal{O}_K} k$ (cf. [2]). L'homomorphisme $\Omega_{R_0/\mathbf{Z}}^1 / p^{n+1} \Omega_{R_0/\mathbf{Z}}^1 \xrightarrow{p^n} \Omega_{R_0/\mathbf{Z}}^1 / p^{n+1} \Omega_{R_0/\mathbf{Z}}^1$ se factorise par $\Omega_{R_0/\mathbf{Z}}^1 \otimes_{R_0} k$ et donne lieu à la suite exacte

$$\Omega_{R_0/\mathbf{Z}}^1 \otimes_{R_0} (R_0 / p R_0) \xrightarrow{p^n} \Omega_{R_0/\mathbf{Z}}^1 / p^{n+1} \Omega_{R_0/\mathbf{Z}}^1 \rightarrow \Omega_{R_0/\mathbf{Z}}^1 / p^n \Omega_{R_0/\mathbf{Z}}^1 \rightarrow 0.$$

On a le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} \bigoplus_{i=1}^d (R_0 / p R_0) \, d \log (T_i) & \xrightarrow{p^n} & \bigoplus_{i=1}^d (R_0 / p^{n+1} R_0) \, d \log (T_i) & \longrightarrow & \bigoplus_{i=1}^d (R_0 / p^n R_0) \, d \log (T_i) & \longrightarrow & 0 \\ \parallel & & \downarrow \alpha & & \parallel & & \\ \Omega_{R_0/\mathbf{Z}}^1 \otimes_{R_0} (R_0 / p R_0) & \xrightarrow{p^n} & \Omega_{R_0/\mathbf{Z}}^1 / p^{n+1} \Omega_{R_0/\mathbf{Z}}^1 & \longrightarrow & \Omega_{R_0/\mathbf{Z}}^1 / p^n \Omega_{R_0/\mathbf{Z}}^1 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

La surjectivité de α est immédiate. Si $\omega \in \text{Ker}(\alpha)$, alors ω est la classe modulo p^{n+1} de $p^n \widehat{\omega}$ où $\widehat{\omega} \in \bigoplus_{i=1}^d R_0 \, d \log (T_i)$ avec $p^n \widehat{\omega} \in p^{n+1} \Omega_{R_0/\mathbf{Z}}^1$. Comme les $d \log (T_i)$ ne sont pas de p -torsion dans $\Omega_{R_0/\mathbf{Z}}^1$, on a $\widehat{\omega} \in p \left(\bigoplus_{i=1}^d R_0 \, d \log (T_i) \right)$

d'où $\omega = 0$, et α est un isomorphisme. En passant à la limite, on a bien $\widehat{\Omega}_{R_0}^1 = \bigoplus_{i=1}^d R_0 \, d \log (T_i)$.

Comme pour tout $n \in \mathbf{N}_{>0}$, le $R_0 / p^n R_0$ -module $\Omega_{R_0/\mathbf{Z}}^1 / p^n \Omega_{R_0/\mathbf{Z}}^1$ est libre de rang d (de base $(d \log (T_i))_{1 \leq i \leq d}$), le complété $\widehat{\Omega}_{R_0}^q$ du produit extérieur est le produit extérieur $\bigwedge_{R_0}^q \widehat{\Omega}_{R_0}^1$ du complété.

On a une suite exacte $0 \rightarrow N \rightarrow \Omega_{R_0/\mathbf{Z}}^1 \otimes_{R_0} R \rightarrow \Omega_{R/\mathbf{Z}}^1 \rightarrow \Omega_{R/R_0}^1 \rightarrow 0$ (cf. [42, Theorem 25.1]). Comme $R[p^{-1}]$ est étale sur $\widetilde{R}[p^{-1}]$ donc sur $R_0[p^{-1}]$, les modules $N[p^{-1}]$ et $\Omega_{R/R_0}^1[p^{-1}]$ sont nuls : les R -modules N et Ω_{R/R_0}^1 sont de p -torsion. Comme ils sont de type fini sur R (car R est noethérien et fini sur \widetilde{R} donc sur R_0), ils sont donc tués par une puissance de p : il existe $c \in \mathbf{N}$ tel que $p^c \Omega_{R_0/\mathbf{Z}}^1 \otimes_{R_0} R \xrightarrow{\sim} p^c \Omega_{R/\mathbf{Z}}^1$. En quotientant par p^n , puis en prenant la puissance extérieure q -ième et en passant à la limite, on tire $p^c \widehat{\Omega}_{R_0}^q \otimes_{R_0} R \xrightarrow{\sim} p^c \widehat{\Omega}_R^q$ (le produit tensoriel complété $\widehat{\Omega}_{R_0}^q \widehat{\otimes}_{R_0} R$ est isomorphe à $\widehat{\Omega}_{R_0}^q \otimes_{R_0} R$ car R est fini sur R_0 et $\widehat{\Omega}_{R_0}^q$ libre sur R_0). Le noyau et le conoyau de l'homomorphisme $\widehat{\Omega}_{R_0}^q \otimes_{R_0} R \rightarrow \widehat{\Omega}_R^q$ sont donc tués par p^c . \square

Notons $\widehat{\overline{R}}$ le séparé complété de \overline{R} pour la topologie p -adique, et $C = \widehat{\overline{R}}[p^{-1}]$. Par continuité, \mathcal{G}_R agit sur $\widehat{\overline{R}}$ et sur C .

Proposition 2.0.3. — L'anneau $\widehat{\overline{R}}$ est sans p -torsion. Par ailleurs, l'homomorphisme naturel $\overline{R} \rightarrow \widehat{\overline{R}}$ est injectif, et on a $\overline{R} \cap p \widehat{\overline{R}} = p \overline{R}$.

Démonstration. — La première assertion résulte du fait que \overline{R} est sans p -torsion.

Soit $x \in \overline{R}$ d'image nulle dans $\widehat{\overline{R}}$. Il existe une R -algèbre S finie et normale telle que $S[p^{-1}]$ est étale sur $R[p^{-1}]$ et $x \in S$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $x \in p^n \overline{R} \cap S = p^n S$ (car S est normal), donc $x = 0$ vu que S est séparé pour la topologie p -adique.

On a bien sûr l'inclusion $p \overline{R} \subseteq \overline{R} \cap p \widehat{\overline{R}}$. Soit $x \in \overline{R} \cap p \widehat{\overline{R}}$. Il existe une R -algèbre S finie et normale telle que $S[p^{-1}]$ est étale sur $R[p^{-1}]$ et $x \in S$. Écrivons $x = py$ avec $y \in \widehat{\overline{R}}$, et montrons que $y \in S$. On a déjà $y \in S[p^{-1}]$. Comme S est normal et noethérien (car S est fini sur \widetilde{R}), on a $S = S[p^{-1}] \cap \bigcap_{\substack{\text{ht}(\mathfrak{q})=1 \\ p \in \mathfrak{q}}} S_{\mathfrak{q}}$ (cf. [42, Theorem 11.5]) : il suffit

donc de montrer que $y \in S_{\mathfrak{q}}$ pour tout $\mathfrak{q} \in \text{Spec}(S)$ de hauteur 1 tel que $p \in \mathfrak{q}$. Le localisé $S_{\mathfrak{q}}$ étant normal (car S l'est), noethérien de dimension 1, c'est un anneau de valuation discrète. Notons $v_{\mathfrak{q}}$ la valuation normalisée.

Cette dernière se prolonge au complété \widehat{S}_q , à une clôture algébrique $\overline{\widehat{S}_q[p^{-1}]}$ de son corps des fractions $\widehat{S}_q[p^{-1}]$ et au complété $\widehat{\overline{\widehat{S}_q[p^{-1}]}}$ pour la topologie p -adique. L'anneau \widehat{R} s'envoie alors dans l'anneau des entiers de $\widehat{\overline{\widehat{S}_q[p^{-1}]}}$: comme $y \in \widehat{R}$, on a $v_q(y) \geq 0$ et donc $y \in S_q$. \square

Par la suite, on identifie \overline{R} à son image dans \widehat{R} et $\widehat{R}/p\widehat{R}$ à $\overline{R}/p\overline{R}$.

Remarque 2.0.4. — L'anneau \widehat{R} est en général très loin d'être intègre, cela est dû au fait qu'il existe en général une infinité d'idéaux premiers au-dessus de l'idéal premier $p\widehat{R}$.

CHAPITRE 3

L'ANNEAU C

3.1. Propriétés galoisiennes

L'objet de cette partie est d'adapter à la situation qui précède des résultats de cohomologie galoisienne (dus à Faltings [20, Section I.4] et [22, 2c]) qui généralisent [36, Theorem 1].

Remarquons que l'anneau \overline{R} est stable par l'action de \mathcal{G}_R (par normalité de \widetilde{R}). Soit S une \widetilde{R} -algèbre finie et normale, telle que $S[p^{-1}]/\widetilde{R}[p^{-1}]$ est étale. Pour $n \in \mathbf{N}_{>0}$, l'anneau $S \otimes_{\widetilde{R}} \widetilde{R}_n$ est réduit. En effet, comme \widetilde{R}_n est libre sur \widetilde{R} , l'homomorphisme naturel $S \otimes_{\widetilde{R}} \widetilde{R}_n \rightarrow (S \otimes_{\widetilde{R}} \widetilde{R}_n)[p^{-1}]$ est injectif, et $(S \otimes_{\widetilde{R}} \widetilde{R}_n)[p^{-1}]$ est réduit car étale sur $\widetilde{R}[p^{-1}]$. Notons S_n (resp. S_∞) le normalisé de $S \otimes_{\widetilde{R}} \widetilde{R}_n$ (resp. de $S \otimes_{\widetilde{R}} A_\infty$). L'anneau S_n est un produit fini de \widetilde{R} -algèbres normales : $S_n \simeq \prod_{j=1}^{r_n} S_n^{(j)}$. L'anneau $(S \otimes_{\widetilde{R}} \widetilde{R}_n)[p^{-1}]$ étant normal car fini étale sur $\widetilde{R}_n[p^{-1}]$ qui est normal, on a $S_n[p^{-1}] = (S \otimes_{\widetilde{R}} \widetilde{R}_n)[p^{-1}]$. Les anneaux $S_n^{(j)}[p^{-1}]$ sont donc finis étales sur $\widetilde{R}[p^{-1}]$. Comme chaque facteur $S_n^{(j)}$ est entier sur \widetilde{R}_n donc sur \widetilde{R} , on a $S_n^{(j)} \subseteq \overline{R}$ quels que soient $n \in \mathbf{N}_{>0}$ et $j \in \{1, \dots, r_n\}$. En particulier, chacun des facteurs de S_∞ s'injecte dans \overline{R} , et \overline{R} est réunion filtrante des tels facteurs.

Si B est une \widetilde{R} -algèbre, on note $\widehat{B} = \varprojlim_n B/p^n B$ son séparé complété pour la topologie p -adique. Si B est en outre une \widetilde{R}_∞ -algèbre, on note \mathfrak{m}_B l'idéal de B engendré par $\{p^c, c \in v(K_\infty) \cap \mathbf{Q}_{>0}\}$. L'action de \mathcal{G}_R sur \overline{R} se prolonge à \widehat{R} et donc à C .

On munit \widehat{R} de la topologie p -adique, *i.e.* définie par la famille d'idéaux $\{p^n \widehat{R}\}_{n \in \mathbf{N}}$. Dans ce qui suit, on calcule la cohomologie galoisienne *continue* de \widehat{R} , de C et de leurs tordus à la Tate.

Proposition 3.1.1. — *Le conoyau de l'application naturelle $\widehat{R}_\infty \rightarrow H^0(\mathcal{H}_R, \widehat{R})$ est de $\mathfrak{m}_{\widehat{R}_\infty}$ -torsion. Par ailleurs, pour $q > 0$, les \widehat{R}_∞ -modules $H^q(\mathcal{H}_R, \widehat{R})$ sont de $\mathfrak{m}_{\widehat{R}_\infty}$ -torsion (« presque nuls » dans la terminologie de Faltings). En particulier, on a*

$$H^q(\mathcal{H}_R, C) = \begin{cases} \widehat{R}_\infty[p^{-1}] & \text{si } q = 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. — Si $n \in \mathbf{N}_{>0}$, on dispose de la résolution injective de $(\overline{R}/p^n \overline{R})[H_\tau]$ -modules :

$$(*) \quad 0 \rightarrow X^{-1} := \overline{R}/p^n \overline{R} \xrightarrow{\partial^0} X^0 \xrightarrow{\partial^1} X^1 \xrightarrow{\partial^2} X^2 \rightarrow \dots$$

où $X^q = \mathcal{C}^0(\mathcal{H}_R^{q+1}, \overline{R}/p^n \overline{R})$ est le $\overline{R}/p^n \overline{R}$ -module des applications continues de \mathcal{H}_R^{q+1} dans $\overline{R}/p^n \overline{R}$ (l'anneau $\overline{R}/p^n \overline{R}$ étant muni de la topologie discrète, il s'agit des fonctions qui se factorisent à travers un quotient fini de \mathcal{H}_R). Il est muni de l'action de \mathcal{H}_R donnée par $(g.x)(h_0, \dots, h_q) = gx(g^{-1}h_0, \dots, g^{-1}h_q)$.

Soient $q \in \mathbf{N}$ et $x \in (X^q)^{\mathcal{H}_R}$ une cochaîne. Comme (*) est exacte, il existe $y \in X^{q-1}$ tel que $x = \partial^q y$. Comme y est continue, il existe une sous-extension finie et normale $S \subseteq \overline{R}$ de R telle que $S_\infty[p^{-1}]/R_\infty[p^{-1}]$ est étale galoisienne et telle que

$$\begin{cases} y \text{ se factorise par } \text{Gal}(S_\infty[p^{-1}]/R_\infty[p^{-1}])^q, \\ y \text{ est à valeurs dans } S_\infty/p^n S_\infty. \end{cases}$$

Soit $c \in v(K_\infty^\times) \cap \mathbf{Q}_{>0}$. D'après le corollaire 9.1.2, il existe $\alpha \in S_\infty$ tel que $\text{Tr}_{S_\infty[p^{-1}]/R_\infty[p^{-1}]}(\alpha) = p^c$. On a alors $\text{Tr}_{S_\infty[p^{-1}]/R_\infty[p^{-1}]}(\alpha y) \in (X^{q-1})^{\mathcal{H}_R}$ et

$$\partial^q(\text{Tr}_{S_\infty[p^{-1}]/R_\infty[p^{-1}]}(\alpha y)) = \text{Tr}_{S_\infty[p^{-1}]/R_\infty[p^{-1}]}(\alpha \partial^q y) = \text{Tr}_{S_\infty[p^{-1}]/R_\infty[p^{-1}]}(\alpha) x = p^c x.$$

Ceci implique que $p^c x$ est un cobord : $p^c x$ a une image nulle dans $H^q(\mathcal{H}_R, \overline{R}/p^n \overline{R})$ si $q > 0$ et $p^c x \in R_\infty/p^n R_\infty$ si $q = 0$. Ainsi les R_∞ -modules

$$\begin{cases} H^q(\mathcal{H}_R, \overline{R}/p^n \overline{R}) & \text{si } q > 0 \\ \text{Coker}(R_\infty/p^n R_\infty \rightarrow H^0(\mathcal{H}_R, \overline{R}/p^n \overline{R})) & \end{cases}$$

sont tués par \mathfrak{m}_{R_∞} .

Soit $x \in H^0(\mathcal{H}_R, \widehat{R})$. D'après ce qui précède, pour tout $n \in \mathbf{N}_{>0}$, il existe $x_n \in R_\infty$ et $y_n \in \widehat{R}$ tel que $p^c x = x_n + p^n y_n$. On a donc $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in \widehat{R}_\infty$. Ainsi, le conoyau de l'application naturelle $\widehat{R}_\infty \rightarrow H^0(\mathcal{H}_R, \widehat{R})$ tué par $\mathfrak{m}_{\widehat{R}_\infty}$.

Soit $q > 0$. D'après [47, Proposition 2.2], on a la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathbf{R}^1 \varprojlim_n H^{q-1}(\mathcal{H}_R, \overline{R}/p^n \overline{R}) \rightarrow H^q(\mathcal{H}_R, \widehat{R}) \rightarrow \varprojlim_n H^q(\mathcal{H}_R, \overline{R}/p^n \overline{R}) \rightarrow 0$$

(dans [47, §2], Tate suppose que les coefficients sont des \mathbf{Z}_p -modules de type fini, mais seul sert le fait que les $\overline{R}/p^n \overline{R}$ sont munis de la topologie *discrète*, cf. aussi [38, §2]). Comme $H^i(\mathcal{H}_R, \overline{R}/p^n \overline{R})$ est tué par \mathfrak{m}_{R_∞} pour $i > 0$, il en est de même des R_∞ -modules $\mathbf{R}^1 \varprojlim_n H^i(\mathcal{H}_R, \overline{R}/p^n \overline{R})$ et $\varprojlim_n H^i(\mathcal{H}_R, \overline{R}/p^n \overline{R})$ (par functorialité, les applications de multiplication sont p^c sont nulles pour $c \in v(K_\infty^\times) \cap \mathbf{Q}_{>0}$). Cela implique que $H^q(\mathcal{H}_R, \widehat{R})$ est tué par \mathfrak{m}_{R_∞} pour $q > 1$, et que le conoyau de l'injection $\mathbf{R}^1 \varprojlim_n H^0(\mathcal{H}_R, \overline{R}/p^n \overline{R}) \rightarrow H^1(\mathcal{H}_R, \widehat{R})$ est tué par \mathfrak{m}_{R_∞} . Mais comme le conoyau de l'injection $R_\infty/p^n R_\infty \rightarrow H^0(\mathcal{H}_R, \overline{R}/p^n \overline{R})$ est tué par \mathfrak{m}_{R_∞} d'après ce qui précède, il en est de même du conoyau de $\mathbf{R}^1 \varprojlim_n R_\infty/p^n R_\infty \rightarrow \mathbf{R}^1 \varprojlim_n H^0(\mathcal{H}_R, \overline{R}/p^n \overline{R})$ d'après la suite exacte longue de cohomologie. Comme le système projectif $\{R_\infty/p^n R_\infty\}_{n \in \mathbf{N}_{>0}}$ vérifie la condition de Mittag-Leffler (les morphismes de projection sont surjectifs), on a $\mathbf{R}^1 \varprojlim_n R_\infty/p^n R_\infty = 0$, et $H^1(\mathcal{H}_R, \widehat{R})$ est tué par \mathfrak{m}_{R_∞} . \square

Remarque 3.1.2. — Le contrôle précis de la ramification donné par le théorème 9.1.1 n'est pas nécessaire pour la preuve de la proposition 3.1.1, le théorème de Faltings ([20, Theorem 3.1]) suffit.

Lemme 3.1.3. — *Il existe une constante c_R (qui ne dépend que de R) tel que pour tout $n \in \mathbf{N}_{>0}$, on a $R_n \subseteq p^{-c_R}(R \otimes_{\widehat{R}} \widetilde{R}_n)$. En particulier, on a $\widehat{R}_\infty \subseteq p^{-c_R}(R \otimes_{\widehat{R}} \widehat{R}_\infty)$.*

Démonstration. — D'après [1, Corollary 3.10], il existe une constante $c(R)$ ne dépendant que de R telle que pour tout n , on a $p^{c(R)p^{-n}} R_{n+1} \subseteq R_n \otimes_{\widehat{R}_n} \widetilde{R}_{n+1}$. On a donc $p^{c(R)(p^{-n+1} + \dots + 1)} R_n \subseteq R \otimes_{\widehat{R}} \widetilde{R}_n$: on peut prendre $c_R = \frac{c(R)p}{p-1}$. Le second énoncé résulte de [1, Corollary 3.10]. \square

Notons W_∞ l'anneau des entiers de l'extension cyclotomique de K_0 et \widehat{W}_∞ le complété de W_∞ pour la topologie p -adique.

Lemme 3.1.4. — *L'homomorphisme $R \otimes_W \widehat{W}_\infty \rightarrow \widehat{R}_\infty$ induit un homomorphisme*

$$H^\bullet(\widetilde{\Gamma}_R, R \otimes_W \widehat{W}_\infty) \rightarrow H^\bullet(\widetilde{\Gamma}_R, \widehat{R}_\infty)$$

dont le noyau et le conoyau sont tués par une puissance de p . Par ailleurs, pour tout $q \in \mathbf{N}$, on a

$$H^\bullet(\widetilde{\Gamma}_R, R \otimes_W \widehat{W}_\infty) \simeq \bigwedge_{R \otimes_W \widehat{W}_\infty}^\bullet H^1(\widetilde{\Gamma}_R, R \otimes_W \widehat{W}_\infty)$$

$$\text{et} \quad H^1(\widetilde{\Gamma}_R, R \otimes_W \widehat{W}_\infty) \simeq ((R \otimes_W \widehat{W}_\infty)(-1))^d.$$

Démonstration. — L'homomorphisme $R \otimes_W \widehat{W}_\infty \rightarrow \widehat{R}_\infty$ se factorise par l'inclusion $R \otimes_{\widehat{R}} \widehat{R}_\infty \rightarrow \widehat{R}_\infty$. Par ailleurs, d'après le lemme 3.1.3, on a des inclusions $p^{c_R} \widehat{R}_\infty \subseteq R \otimes_{\widehat{R}} \widehat{R}_\infty \subseteq \widehat{R}_\infty$: le noyau et le conoyau de l'homomorphisme $H^\bullet(\widetilde{\Gamma}_R, R \otimes_{\widehat{R}} \widehat{R}_\infty) \rightarrow H^\bullet(\widetilde{\Gamma}_R, \widehat{R}_\infty)$ sont tués par p^{c_R} . Il suffit donc de montrer que le noyau et le conoyau de $H^\bullet(\widetilde{\Gamma}_R, R \otimes_W \widehat{W}_\infty) \rightarrow H^\bullet(\widetilde{\Gamma}_R, R \otimes_{\widehat{R}} \widehat{R}_\infty)$ sont tués par une puissance de p .

Soit $A = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_d), \alpha_i \in \mathbf{Z}[p^{-1}] \cap [0, 1]\}$. Pour $\underline{\alpha} \in A$, il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $p^n \underline{\alpha} \in \mathbf{N}^d$. On pose alors $\underline{T}^\alpha = (T_1^{(n)})^{p^n \alpha_1} \dots (T_i^{(n)})^{p^n \alpha_i} \dots (T_d^{(n)})^{p^n \alpha_d}$. Le $R \otimes_W \widehat{W}_\infty$ -module $R \otimes_{\widehat{R}} \widehat{R}_\infty$ est topologiquement libre de base

$(\underline{T}^\alpha)_{\underline{\alpha} \in A}$. Comme $\gamma_i(\underline{T}^\alpha) = (\varepsilon^{(n)})^{p^n \alpha_i} \underline{T}^\alpha$, chaque facteur $(R \otimes_W \widehat{W}_\infty) \underline{T}^\alpha$ est stable par $\widetilde{\Gamma}_R$.

Soit $(\gamma_i^{(R)})_{1 \leq i \leq d}$ une base de $\widetilde{\Gamma}_R$ (on a $\widetilde{\Gamma}_R \simeq (\mathbf{Z}_p(1))^d$). On dispose alors du complexe de Koszul

$$K_\bullet: \quad \cdots \rightarrow 0 \rightarrow \mathbf{Z}[\widetilde{\Gamma}_R] \rightarrow \cdots \rightarrow \bigwedge_{\mathbf{Z}[\widetilde{\Gamma}_R]}^q \mathbf{Z}[\widetilde{\Gamma}_R]^d \rightarrow \cdots \rightarrow \mathbf{Z}[\widetilde{\Gamma}_R]^d \rightarrow \mathbf{Z}[\widetilde{\Gamma}_R] \rightarrow 0$$

associé à la suite $(\gamma_1^{(R)} - 1, \dots, \gamma_d^{(R)} - 1)$ (cf. [42, §16]). C'est une résolution projective du $\mathbf{Z}[\widetilde{\Gamma}_R]$ -module \mathbf{Z} : si M est un $\mathbf{Z}[\widetilde{\Gamma}_R]$ -module, on a $\mathbf{H}^\bullet(\widetilde{\Gamma}_R, M) = \mathbf{H}^\bullet(\text{Hom}_{\mathbf{Z}[\widetilde{\Gamma}_R]}(K_\bullet, M))$. Comme $\text{Hom}_{\mathbf{Z}[\widetilde{\Gamma}_R]}(\mathbf{Z}[\widetilde{\Gamma}_R], M) = M(-1)$ (vu que pour $f \in \text{Hom}_{\mathbf{Z}[\widetilde{\Gamma}_R]}(\mathbf{Z}[\widetilde{\Gamma}_R], M)$, $g \in \Gamma_R$ et $\gamma \in \widetilde{\Gamma}_R$, on a $(g \cdot f)(\gamma) = g(f(g^{-1} \cdot \gamma)) = \chi(g)^{-1} g(f(\gamma))$), la cohomologie de M est donnée par celle du complexe de Koszul

$$\cdots \rightarrow 0 \rightarrow M(-1) \rightarrow (M(-1))^d \rightarrow \cdots \rightarrow \bigwedge_{\mathbf{Z}[\widetilde{\Gamma}_R]}^q (M(-1))^d \rightarrow \cdots \rightarrow M(-1) \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$$

associé à la suite $(\gamma_1^{(R)} - 1, \dots, \gamma_d^{(R)} - 1)$.

Soient $\underline{\alpha} \in A$ et $n \in \mathbf{N}$ tel que $p^n \underline{\alpha} \in \mathbf{N}^d$. Il existe $\lambda_{1, \underline{\alpha}}, \dots, \lambda_{d, \underline{\alpha}} \in (\varepsilon^{(n)})^{\mathbf{Z}}$ tels que $\gamma_i^{(R)}(\underline{T}^\alpha) = \lambda_{i, \underline{\alpha}} \underline{T}^\alpha$. La cohomologie de $\widetilde{\Gamma}_R$ à valeurs dans le facteur $(R \otimes_W \widehat{W}_\infty) \underline{T}^\alpha$ est donc donnée par le complexe de Koszul $(\cdots \rightarrow \bigwedge^q ((R \otimes_W \widehat{W}_\infty) \underline{T}^\alpha(-1))^d \rightarrow \cdots)$ associé à la suite $(\lambda_{1, \underline{\alpha}} - 1, \dots, \lambda_{d, \underline{\alpha}} - 1)$.

Pour $\underline{\alpha} = \underline{0}$, l'action de $\widetilde{\Gamma}_R$ sur $R \otimes_W \widehat{W}_\infty$ est triviale, les flèches du complexe de Koszul associé sont toutes nulles et on a bien $\mathbf{H}^\bullet(\widetilde{\Gamma}_R, R \otimes_W \widehat{W}_\infty) \simeq \bigwedge^\bullet ((R \otimes_W \widehat{W}_\infty)(-1))^d$.

Si $\underline{\alpha} \neq \underline{0}$, alors il existe $i \in \{1, \dots, d\}$ tel que $\gamma_i^{(R)}(\underline{T}^\alpha) \neq \underline{T}^\alpha$ i.e. $\lambda_{i, \underline{\alpha}} \neq 1$. Comme $\lambda_{i, \underline{\alpha}} \in (\varepsilon^{(n)})^{\mathbf{Z}}$ pour $n \gg 0$, on a $\lambda_{i, \underline{\alpha}} - 1 \mid \varepsilon^{(1)} - 1$. Comme l'homologie du complexe de Koszul est tuée par $\lambda_{1, \underline{\alpha}} - 1, \dots, \lambda_{d, \underline{\alpha}} - 1$ (cf. *loc. cit.*), elle l'est *a fortiori* par $\varepsilon^{(1)} - 1$ i.e. par $p^{\frac{1}{p-1}}$. Ainsi le noyau et le conoyau de $\mathbf{H}^\bullet(\widetilde{\Gamma}_R, R \otimes_W \widehat{W}_\infty) \rightarrow \mathbf{H}^\bullet(\widetilde{\Gamma}_R, R \otimes_{\widehat{R}} \widehat{R}_\infty)$ sont tués par $p^{\frac{1}{p-1}}$, ce qu'on voulait. \square

Posons $K'_0 = \widehat{W}_\infty[p^{-1}] \cap R[p^{-1}]$. On a aussi $K'_0 = W_\infty[p^{-1}] \cap K$ vu qu'on a supposé K algébriquement clos dans $R[p^{-1}]$. C'est une extension finie de K_0 , et $R[p^{-1}]$ et $\widehat{W}_\infty[p^{-1}]$ sont linéairement disjoints sur K'_0 .

Proposition 3.1.5. — *L'homomorphisme $R[p^{-1}] \otimes_{K'_0} \widehat{W}_\infty[p^{-1}] \rightarrow C$ induit des isomorphismes*

$$\bigwedge_{R[p^{-1}] \otimes_{K'_0} \widehat{W}_\infty[p^{-1}]}^q \mathbf{H}^1(\widetilde{\Gamma}_R, R[p^{-1}] \otimes_{K'_0} \widehat{W}_\infty[p^{-1}]) \simeq \mathbf{H}^q(\widetilde{\Gamma}_R, R[p^{-1}] \otimes_{K'_0} \widehat{W}_\infty[p^{-1}]) \xrightarrow{\sim} \mathbf{H}^q(\widetilde{\mathcal{H}}_R, C)$$

où $\widetilde{\mathcal{H}}_R$ désigne le noyau de l'homomorphisme $\mathcal{G}_R \rightarrow \Gamma_K$.

Démonstration. — La suite spectrale de Hochschild-Serre s'écrit $\mathbf{H}^q(\widetilde{\Gamma}_R, \mathbf{H}^r(\mathcal{H}_R, C)) \Rightarrow \mathbf{H}^{q+r}(\widetilde{\mathcal{H}}_R, C)$. D'après la proposition 3.1.1, on a $\mathbf{H}^r(\mathcal{H}_R, C) = 0$ si $r > 0$ et $\mathbf{H}^0(\mathcal{H}_R, C) = \widehat{R}_\infty[p^{-1}]$: la suite spectrale dégénère et on a $\mathbf{H}^q(\widetilde{\mathcal{H}}_R, C) = \mathbf{H}^q(\widetilde{\Gamma}_R, \widehat{R}_\infty[p^{-1}])$.

D'après le lemme 3.1.4, l'homomorphisme $R[p^{-1}] \otimes_{W[p^{-1}]} \widehat{W}_\infty[p^{-1}] \rightarrow \widehat{R}_\infty[p^{-1}]$ induit des isomorphismes $\bigwedge^q \mathbf{H}^1(\widetilde{\Gamma}_R, R[p^{-1}] \otimes_{W[p^{-1}]} \widehat{W}_\infty[p^{-1}]) \simeq \mathbf{H}^q(\widetilde{\Gamma}_R, R[p^{-1}] \otimes_{W[p^{-1}]} \widehat{W}_\infty[p^{-1}]) \xrightarrow{\sim} \mathbf{H}^q(\widetilde{\Gamma}_R, \widehat{R}_\infty[p^{-1}])$.

Comme on a $R[p^{-1}] \otimes_{K'_0} \widehat{W}_\infty[p^{-1}] \subset C$ (par disjonction linéaire de $R[p^{-1}]$ et de $\widehat{W}_\infty[p^{-1}]$ au-dessus de K'_0), les homomorphismes $\bigwedge^q \mathbf{H}^1(\widetilde{\Gamma}_R, R[p^{-1}] \otimes_{K'_0} \widehat{W}_\infty[p^{-1}]) \rightarrow \mathbf{H}^q(\widetilde{\Gamma}_R, R[p^{-1}] \otimes_{K'_0} \widehat{W}_\infty[p^{-1}]) \rightarrow \mathbf{H}^q(\widetilde{\mathcal{H}}_R, C)$ sont des facteurs des isomorphismes $\bigwedge^q \mathbf{H}^1(\widetilde{\Gamma}_R, R[p^{-1}] \otimes_{W[p^{-1}]} \widehat{W}_\infty[p^{-1}]) \xrightarrow{\sim} \mathbf{H}^q(\widetilde{\Gamma}_R, R[p^{-1}] \otimes_{W[p^{-1}]} \widehat{W}_\infty[p^{-1}]) \xrightarrow{\sim} \mathbf{H}^q(\widetilde{\Gamma}_R, \widehat{R}_\infty[p^{-1}])$, ce sont donc des isomorphismes. \square

L'extension canonique de Faltings.

Rappelons la construction due à Faltings ([20, I.4]) d'une extension canonique de \mathcal{G}_{R_0} -modules

$$(1) \quad 0 \rightarrow C \rightarrow M \rightarrow \widehat{\Omega}_{R_0}^1 \otimes_{R_0} C(-1) \rightarrow 0$$

avec $M = \text{T}_p(\Omega_{R/R_0}^1)[p^{-1}](-1)$ (où $\text{T}_p(\cdot) = \text{Hom}(\mathbf{Q}_p / \mathbf{Z}_p, \cdot)$ est le module de Tate).

La suite

$$(2) \quad 0 \rightarrow \Omega_{W_\infty/W}^1 \otimes_{W_\infty} R_{0,\infty} \rightarrow \Omega_{R_{0,\infty}/R_0}^1 \rightarrow \Omega_{R_{0,\infty}/R_0.W_\infty}^1 \rightarrow 0$$

est exacte et scindée (de façon non canonique). Cela résulte du fait que pour tout $n \in \mathbf{N}_{>0}$, on a $R_{0,n} = R_0[\varepsilon^{(n)}, T_1^{(n)}, \dots, T_d^{(n)}]$ et donc une suite exacte et scindée $0 \rightarrow \Omega_{W_n/W}^1 \otimes_{W_n} R_{0,n} \rightarrow \Omega_{R_{0,n}/R_0}^1 \rightarrow \Omega_{R_{0,n}/R_0 \cdot W_n}^1 \rightarrow 0$. D'après [24], l'homomorphisme

$$(3) \quad \begin{aligned} W_\infty \otimes_{\mathbf{Z}_p} (\mathbf{Q}_p / \mathbf{Z}_p)(1) &\longrightarrow \Omega_{W_\infty/W}^1 \\ a \otimes \varepsilon^{(n)} &\longmapsto a \, d \log (\varepsilon^{(n)}) \end{aligned}$$

est surjectif et son noyau est tué par p^ρ avec $\rho \in \mathbf{Q}_{>0}$ (notons qu'il ne dépend pas du choix des $(\varepsilon^{(n)})_{n \in \mathbf{N}_{>0}}$). Par ailleurs, on sait (proposition 2.0.2), que pour tout $n \in \mathbf{N}_{>0}$, on a $\Omega_{R_0/W}^1 / p^n \Omega_{R_0/W}^1 = \bigoplus_{i=1}^d (R_0 / p^n R_0) \, d \log (T_i)$,

d'où $\Omega_{R_0/W}^1 \otimes_{R_0} (\frac{1}{p^n} R_{0,\infty} / R_{0,\infty}) = \bigoplus_{i=1}^d (\frac{1}{p^n} R_{0,\infty} / R_{0,\infty}) \, d \log (T_i)$. On peut donc définir l'application suivante

$$\begin{aligned} \Omega_{R_0/W}^1 \otimes_{R_0} (R_{0,\infty}[p^{-1}] / R_{0,\infty}) &\longrightarrow \Omega_{R_{0,\infty}/R_0}^1 \\ d \log (T_i) \otimes p^{-n} &\longmapsto d \log (T_i^{(n)}). \end{aligned}$$

Cette application dépend des choix pour les $T_i^{(n)}$, mais le composé avec la surjection canonique $\Omega_{R_{0,\infty}/R_0}^1 \rightarrow \Omega_{R_{0,\infty}/R_0 \cdot W_\infty}^1$ n'en dépend pas (parce que $d \log (\varepsilon^{(n)}) = 0$ dans $\Omega_{R_{0,\infty}/R_0 \cdot W_\infty}^1$). On obtient donc une application $\Omega_{R_0/W}^1 \otimes_{R_0} (R_{0,\infty}[p^{-1}] / R_{0,\infty}) \rightarrow \Omega_{R_{0,\infty}/R_0 \cdot W_\infty}^1$. C'est un isomorphisme parce que $R_{0,\infty} = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} (R_0 \cdot W_\infty) [T_1^{(n)}, \dots, T_d^{(n)}]$. La suite (2) peut donc se réécrire

$$0 \rightarrow (R_{0,\infty}[p^{-1}] / p^\rho R_{0,\infty})(1) \rightarrow \Omega_{R_{0,\infty}/R_0}^1 \rightarrow \Omega_{R_0/W}^1 \otimes_{R_0} (R_{0,\infty}[p^{-1}] / R_{0,\infty}) \rightarrow 0.$$

Comme elle est scindée, on en déduit une suite exacte et scindée

$$(3) \quad 0 \rightarrow (\overline{R}[p^{-1}] / p^\rho \overline{R})(1) \rightarrow \overline{R} \otimes_{R_{0,\infty}} \Omega_{R_{0,\infty}/R_0}^1 \rightarrow \Omega_{R_0/W}^1 \otimes_{R_0} (\overline{R}[p^{-1}] / \overline{R}) \rightarrow 0.$$

Le module $\mathbb{T}_p(\overline{R}[p^{-1}] / \overline{R})$ est l'ensemble des classes d'équivalence de suites $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ avec $a_n \in \overline{R}[p^{-1}]$ tels que $p^n a_n \in \overline{R}$ et $pa_{n+1} \equiv a_n \pmod{\overline{R}}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, deux suites étant équivalentes lorsque leur différence est à valeurs dans \overline{R} . Pour une telle suite $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$, la suite $(p^n a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge dans $\widehat{\overline{R}}$ et l'application induite $\mathbb{T}_p(\overline{R}[p^{-1}] / \overline{R}) \rightarrow \widehat{\overline{R}}$ est un isomorphisme. En particulier, comme $\Omega_{R_0/W}^1 \otimes_{R_0} (\overline{R}[p^{-1}] / \overline{R})$ est libre sur $\overline{R}[p^{-1}] / \overline{R}$, on a $\mathbb{T}_p(\Omega_{R_0/W}^1 \otimes_{R_0} (\overline{R}[p^{-1}] / \overline{R})) \simeq \widehat{\Omega}_{R_0}^1 \otimes_{R_0} \widehat{\overline{R}}$. La suite obtenue à partir de la suite (3) en prenant les modules de Tate est exacte et scindée et s'écrit

$$0 \rightarrow p^\rho \widehat{\overline{R}}(1) \rightarrow \mathbb{T}_p(\overline{R} \otimes_{R_{0,\infty}} \Omega_{R_{0,\infty}/R_0}^1) \rightarrow \widehat{\Omega}_{R_0}^1 \otimes_{R_0} \widehat{\overline{R}} \rightarrow 0$$

d'où une suite exacte et scindée

$$(4) \quad 0 \rightarrow C(1) \rightarrow \mathbb{T}_p(\overline{R} \otimes_{R_{0,\infty}} \Omega_{R_{0,\infty}/R_0}^1)[p^{-1}] \rightarrow \widehat{\Omega}_{R_0}^1 \otimes_{R_0} C \rightarrow 0.$$

Comme \overline{R} est réunion de $R_{0,\infty}$ -algèbres « presque étales » (cf. théorème 9.1.1), le noyau et le conoyau de l'homomorphisme naturel $\overline{R} \otimes_{R_{0,\infty}} \Omega_{R_{0,\infty}/R_0}^1 \rightarrow \Omega_{\overline{R}/R_0}^1$ sont de $\mathfrak{m}_{\overline{R}}$ -torsion. Il en est donc de même de l'homomorphisme déduit entre les modules de Tate $\mathbb{T}_p(\overline{R} \otimes_{R_{0,\infty}} \Omega_{R_{0,\infty}/R_0}^1) \rightarrow \mathbb{T}_p(\Omega_{\overline{R}/R_0}^1)$. Ainsi, on a $\mathbb{T}_p(\overline{R} \otimes_{R_{0,\infty}} \Omega_{R_{0,\infty}/R_0}^1)[p^{-1}] \simeq \mathbb{T}_p(\Omega_{\overline{R}/R_0}^1)[p^{-1}] = M(1)$. La suite (1) n'est alors que la suite (4) tensorisée par $\mathbf{Z}_p(-1)$.

Remarque 3.1.6. — Il est clair que la suite exacte (1) est \mathcal{G}_{R_0} -équivariante. D'après ce qui précède, elle est scindée comme C -module, mais pas canoniquement, et pas de façon équivariante.

D'après la proposition 2.0.2, on a $\widehat{\Omega}_R^1[p^{-1}] = R \otimes_{R_0} \widehat{\Omega}_{R_0}^1[p^{-1}]$. La suite exacte (1) peut donc se réécrire $0 \rightarrow C \rightarrow M \rightarrow \widehat{\Omega}_R^1 \otimes_R C(-1) \rightarrow 0$. En prenant la suite exacte longue de cohomologie associée, on obtient un homomorphisme canonique $H^0(\widetilde{\mathcal{H}}_R, \widehat{\Omega}_R^1 \otimes_R C(-1)) \rightarrow H^1(\widetilde{\mathcal{H}}_R, C)$. Comme $\widehat{\Omega}_R^1[p^{-1}]$ est libre sur $R[p^{-1}]$ et invariant sous $\widetilde{\mathcal{H}}_R$, on en déduit un homomorphisme $\widehat{\Omega}_R^1[p^{-1}] \otimes_{K'_0} \widehat{W}_\infty[p^{-1}](-1) \rightarrow H^1(\widetilde{\mathcal{H}}_R, C)$. Pour $q \in \mathbf{N}$, le cup-produit induit un homomorphisme $\widehat{\Omega}_R^q[p^{-1}] \otimes_{K'_0} \widehat{W}_\infty[p^{-1}](-q) \rightarrow \wedge^q H^1(\widetilde{\mathcal{H}}_R, C)$ c'est-à-dire un homomorphisme

$$\widehat{\Omega}_R^q[p^{-1}] \otimes_{K'_0} \widehat{W}_\infty[p^{-1}](-q) \rightarrow H^q(\widetilde{\mathcal{H}}_R, C)$$

d'après la proposition 3.1.5.

Proposition 3.1.7. — Pour tout $q \in \mathbf{N}$, l'homomorphisme $\widehat{\Omega}_R^q[p^{-1}] \otimes_{K'_0} \widehat{W}_\infty[p^{-1}](-q) \rightarrow H^q(\widetilde{\mathcal{H}}_R, C)$ est un isomorphisme.

Démonstration. — D'après la proposition 3.1.5 et la définition de l'homomorphisme, il suffit de prouver l'énoncé pour $q = 1$. Par ailleurs, comme $H^1(\tilde{\Gamma}_R, R[p^{-1}] \otimes_{K'_0} \widehat{W}_\infty[p^{-1}]) \xrightarrow{\sim} H^1(\tilde{\mathcal{H}}_R, C)$ (proposition 3.1.5) et l'action de $\tilde{\Gamma}_R$ sur $R[p^{-1}] \otimes_{K'_0} \widehat{W}_\infty[p^{-1}]$ est triviale, on a $H^1(\tilde{\mathcal{H}}_R, C) \simeq \text{Hom}_{\text{cont}}(\tilde{\Gamma}_R, R[p^{-1}] \otimes_{K'_0} \widehat{W}_\infty[p^{-1}])$.

Le C -module M est libre : il admet la famille $(d \log(\varepsilon), d \log(\tilde{T}_1), \dots, d \log(\tilde{T}_d))$ comme base, avec $d \log(\varepsilon) = (d \log(\varepsilon^{(n)}))_{n \in \mathbf{N}}$ et $d \log(\tilde{T}_i) = (d \log(T_i^{(n)}))_{n \in \mathbf{N}}$ pour $i \in \{1, \dots, d\}$. Dans la suite exacte (1), l'homomorphisme $C \rightarrow M$ (défini à partir de l'homomorphisme (3)) est défini par $1 \mapsto d \log(\varepsilon)$. De même, l'application $M \rightarrow \widehat{\Omega}_{R_0}^1 \otimes_{R_0} C(-1)$ est définie par $d \log(\varepsilon) \mapsto 0$ et $d \log(\tilde{T}_i) \mapsto d \log(T_i) \otimes 1$.

D'après ce qui précède, l'homomorphisme

$$\widehat{\Omega}_R^1[p^{-1}] \otimes_{K'_0} \widehat{W}_\infty[p^{-1}](-1) = \bigoplus_{i=1}^d (R[p^{-1}] \otimes_{K'_0} \widehat{W}_\infty[p^{-1}](-1)) d \log(T_i) \xrightarrow{f} \text{Hom}_{\text{cont}}(\tilde{\Gamma}_R, R[p^{-1}] \otimes_{K'_0} \widehat{W}_\infty[p^{-1}])$$

en question est défini par $d \log(T_i) \mapsto f_i$ où f_i est donné par $f_i(\gamma) = \gamma \cdot d \log(\tilde{T}_i) - d \log(\tilde{T}_i)$ pour $\gamma \in \tilde{\Gamma}_R$.

Rappelons que $\tilde{\Gamma}_R = \bigoplus_{i=1}^d \mathbf{Z}_p \gamma_i^{(R)}$, avec $\gamma_i^{(R)}(T_j^{(n)}) = (\varepsilon^{(n)})^{\mu_{i,j}} T_j^{(n)}$ où la matrice $[\mu_{i,j}]_{1 \leq i, j \leq d} \in M_d(\mathbf{Z}_p)$ est inversible (dans $M_d(\mathbf{Q}_p)$). Pour $i, j \in \{1, \dots, d\}$, on a

$$f_i(\gamma_j^{(R)}) = \gamma_j^{(R)} \cdot d \log(\tilde{T}_i) - d \log(\tilde{T}_i) = d \log(\varepsilon^{\mu_{i,j}} \tilde{T}_i) - d \log(\tilde{T}_i) = \mu_{i,j} d \log(\varepsilon) \mapsto \mu_{i,j} \in C.$$

La famille $(f_i)_{1 \leq i \leq d}$ est donc la base duale de la base $(\gamma_i^{(R)})_{1 \leq i \leq d}$ de $\tilde{\Gamma}_R$: on a $\text{Hom}_{\text{cont}}(\tilde{\Gamma}_R, R[p^{-1}] \otimes_{K'_0} \widehat{W}_\infty[p^{-1}]) = \bigoplus_{i=1}^d (R[p^{-1}] \otimes_{K'_0} \widehat{W}_\infty[p^{-1}]) f_i$ et f est un isomorphisme. \square

Proposition 3.1.8. — (cf. [36, Theorem 1]). Si $q \in \mathbf{N}$ et $n \in \mathbf{Z}$, alors

$$H^q(\mathcal{G}_R, C(n)) \simeq \begin{cases} \widehat{\Omega}_R^n[p^{-1}] & \text{si } q = n, n+1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par ailleurs, l'isomorphisme est canonique pour $q = n$.

Démonstration. — D'après la proposition 3.1.7, on a $\widehat{\Omega}_R^r[p^{-1}] \otimes_{K'_0} \widehat{W}_\infty[p^{-1}](-r) \xrightarrow{\sim} H^r(\tilde{\mathcal{H}}_R, C)$. Par ailleurs, comme K'_0 est un corps invariant sous Γ_K , on a

$$H^q(\Gamma_K, \widehat{\Omega}_R^r[p^{-1}] \otimes_{K'_0} \widehat{W}_\infty[p^{-1}](n-r)) = \widehat{\Omega}_R^r[p^{-1}] \otimes_{K'_0} H^q(\Gamma_K, \widehat{W}_\infty[p^{-1}](n-r)).$$

La suite spectrale de Hochschild-Serre associée à $1 \rightarrow \tilde{\mathcal{H}}_R \rightarrow \mathcal{G}_R \rightarrow \Gamma_K \rightarrow 1$ s'écrit donc

$$\widehat{\Omega}_R^r[p^{-1}] \otimes_{K'_0} H^q(\Gamma_K, \widehat{W}_\infty[p^{-1}](n-r)) \implies H^{q+r}(\mathcal{G}_R, C(n)).$$

Or on sait (cf. [46, Theorems 1 & 2]) que

$$H^i(\Gamma_K, \widehat{W}_\infty[p^{-1}](j)) \simeq \begin{cases} K'_0 & \text{si } j = 0 \text{ et } i = 0, 1, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

l'isomorphisme étant canonique pour $i = j = 0$ (rappelons que par définition, $H^0(\Gamma_K, W_\infty[p^{-1}]) = K'_0$). La suite spectrale dégénère donc et on a le résultat souhaité. \square

3.2. Platitude

Dans cette partie, on utilise le langage de la section 9.2.

Notation. Si $n \in \mathbf{N}_{>0}$, on note $\pi_n = \varepsilon^{(n)} - 1 \in \tilde{R}_\infty$. Si A est une \tilde{R}_∞ -algèbre, on note \mathfrak{m}_A l'idéal de A engendré par $(\pi_n)_{n \in \mathbf{N}_{>0}}$.

Proposition 3.2.1. — L'anneau \overline{R} est une \tilde{R}_∞ -algèbre $\mathfrak{m}_{\overline{R}}$ -plate, donc une \tilde{R} -algèbre $\mathfrak{m}_{\overline{R}}$ -plate.

Démonstration. — Soit $M' \rightarrow M$ une injection de \tilde{R}_∞ -modules et $x \in \text{Ker}(\overline{R} \otimes_{\tilde{R}_\infty} M' \rightarrow \overline{R} \otimes_{\tilde{R}_\infty} M)$. Il existe une sous- \tilde{R} -algèbre finie normale S de \overline{R} telle que $S[p^{-1}]$ est étale sur $\tilde{R}[p^{-1}]$, un facteur $S_\infty^{(j)}$ de S_∞ tels que $x \in \text{Im}(S_\infty^{(j)} \otimes_{\tilde{R}_\infty} M' \rightarrow \overline{R} \otimes_{\tilde{R}_\infty} M')$. D'après le théorème 9.1.1 ([1, Theorem 5.1]) et [22, Theorem 4], l'anneau S_∞ et donc l'anneau $S_\infty^{(j)}$ est « presque plat » i.e. $\mathfrak{m}_{\overline{R}}$ -plat sur \tilde{R}_∞ : le noyau de l'homomorphisme $S_\infty^{(j)} \otimes_{\tilde{R}_\infty} M' \rightarrow S_\infty^{(j)} \otimes_{\tilde{R}_\infty} M$ est tué par $\mathfrak{m}_{\overline{R}}$. Si $n \in \mathbf{N}_{>0}$, on a donc $\pi_n x = 0$ dans $S_\infty^{(j)} \otimes_{\tilde{R}_\infty} M'$, et a fortiori dans $\overline{R} \otimes_{\tilde{R}_\infty} M'$. Comme c'est vrai pour tout $n \in \mathbf{N}_{>0}$ et tout $x \in \text{Ker}(\overline{R} \otimes_{\tilde{R}_\infty} M' \rightarrow \overline{R} \otimes_{\tilde{R}_\infty} M)$, le noyau de l'homomorphisme $\overline{R} \otimes_{\tilde{R}_\infty} M' \rightarrow \overline{R} \otimes_{\tilde{R}_\infty} M$ est tué par $\mathfrak{m}_{\overline{R}}$. Ainsi \overline{R} est $\mathfrak{m}_{\overline{R}}$ -plat sur \tilde{R}_∞ .

L'anneau \widetilde{R}_∞ est libre sur \widetilde{R} : on a $\widetilde{R}_\infty \simeq \widetilde{R}^{(L)}$. Si M est un \widetilde{R} -module, on en déduit que $\widetilde{R}_\infty \otimes_{\widetilde{R}} \text{Tor}_1^{\widetilde{R}}(\overline{R}, M) \simeq \text{Tor}_1^{\widetilde{R}_\infty}(\overline{R}, \widetilde{R}_\infty \otimes_{\widetilde{R}} M)^{(L)}$. Ce dernier étant tué par $\mathfrak{m}_{\overline{R}}$ d'après ce qui précède, \overline{R} est $\mathfrak{m}_{\overline{R}}$ -plat sur \widetilde{R} . \square

Théorème 3.2.2. — *L'anneau $\widehat{\widetilde{R}}$ est une \widetilde{R} -algèbre $\mathfrak{m}_{\widehat{\widetilde{R}}}$ -plate.*

Démonstration. — D'après la proposition 3.2.1, l'anneau \overline{R} est $\mathfrak{m}_{\overline{R}}$ -plat sur \widetilde{R} . Comme \widetilde{R} est séparé et complet pour la topologie p -adique et que p est non diviseur de zéro dans \widetilde{R} , le théorème 9.2.7 appliqué à $B = \overline{R}$ et $\Lambda = \widetilde{R}$ implique que le complété $\widehat{\widetilde{R}}$ est $\mathfrak{m}_{\widehat{\widetilde{R}}}^3$ -plat sur \widetilde{R} . Comme $\mathfrak{m}_{\widehat{\widetilde{R}}}^3 = \mathfrak{m}_{\widehat{\widetilde{R}}}$, on a le résultat souhaité. \square

Théorème 3.2.3. — *L'anneau C est fidèlement plat sur $R[p^{-1}]$.*

Démonstration. — Si M est un $\widetilde{R}[p^{-1}]$ -module, $\text{Tor}_1^{\widetilde{R}}(\widehat{\widetilde{R}}, M)$ est tué par $\mathfrak{m}_{\widehat{\widetilde{R}}}$ d'après la théorème 3.2.2. En localisant en p , on a donc $\text{Tor}_1^{\widetilde{R}[p^{-1}]}(C, M[p^{-1}]) = 0$. Comme M est un $\widetilde{R}[p^{-1}]$ -module, on a $M[p^{-1}] = M$ et donc $\text{Tor}_1^{\widetilde{R}[p^{-1}]}(C, M) = 0$ pour tout $\widetilde{R}[p^{-1}]$ -module M . L'anneau C est donc plat sur $\widetilde{R}[p^{-1}]$.

Montrons qu'en fait C est *fidèlement* plat sur $\widetilde{R}[p^{-1}]$. Comme C est plat sur $\widetilde{R}[p^{-1}]$, il suffit de montrer que si $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(\widetilde{R}[p^{-1}])$ est maximal, alors $\mathfrak{p}C \neq C$ (cf. [42, Theorem 7.2]). Supposons au contraire qu'il existe $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(\widetilde{R})$ maximal avec $p \notin \mathfrak{p}$ tel que $\mathfrak{p}C = C$. On a $1 \in \mathfrak{p}C$: il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $p^n \in \mathfrak{p}\widehat{\widetilde{R}} \subseteq \mathfrak{p}\overline{R} + p^{n+1}\widehat{\widetilde{R}}$, i.e. il existe une sous- \widetilde{R} -algèbre finie normale S de \overline{R} , $b \in \mathfrak{p}S$ et $\alpha \in \widehat{\widetilde{R}}$ tels que $p^n = b + p^{n+1}\alpha$. On a $p^{n+1}\alpha = p^n - b \in S \cap p^{n+1}\widehat{\widetilde{R}} = p^{n+1}S$ (cf. propriété 2.0.3 et normalité de S), donc $\alpha \in S$. Si $N \in \mathbf{N}$, on a $p^{nN} = (b + p^{n+1}\alpha)^N$, i.e. $p^{nN} \in \mathfrak{p}S + p^{(n+1)N}\alpha^n$, d'où, en prenant la trace

$$p^{nN} [\text{Frac}(S) : \text{Frac}(\widetilde{R})] - p^{(n+1)N} \text{Tr}_{S[p^{-1}]/\widetilde{R}[p^{-1}]}(\alpha^n) \in \mathfrak{p}.$$

On a $\text{Tr}_{S[p^{-1}]/\widetilde{R}[p^{-1}]}(\alpha^n) \in \widetilde{R}$. Si r désigne la valuation p -adique de $[\text{Frac}(S) : \text{Frac}(\widetilde{R})]$ (c'est un entier indépendant de n), on a $[\text{Frac}(S) : \text{Frac}(\widetilde{R})] = p^r m$ avec $p \nmid m$ et $p^{nN+r}m - p^{(n+1)N} \text{Tr}_{S[p^{-1}]/\widetilde{R}[p^{-1}]}(\alpha^n) \in \mathfrak{p}$. Si $N > r$, on a donc $p^{nN+r}(m - p^{N-r} \text{Tr}_{S[p^{-1}]/\widetilde{R}[p^{-1}]}(\alpha^n)) \in \mathfrak{p}$. Comme $m - p^{N-r} \text{Tr}_{S[p^{-1}]/\widetilde{R}[p^{-1}]}(\alpha^n) \in \widetilde{R}^\times$, on a $p^{nN+r} \in \mathfrak{p}$ soit $p \in \mathfrak{p}$, ce qui est contraire à l'hypothèse. On en déduit que $\mathfrak{p}C \neq C$, ce qu'on voulait.

Montrons que C est fidèlement plat sur $R[p^{-1}]$. Quitte à remplacer $R[p^{-1}]$ par un revêtement étale de $R[p^{-1}]$, on peut supposer $R[p^{-1}]$ galoisien sur $\widetilde{R}[p^{-1}]$. On a alors $R[p^{-1}] \otimes_{\widetilde{R}[p^{-1}]} R[p^{-1}] = (R[p^{-1}])^r$ comme $R[p^{-1}]$ -algèbre. Comme C est fidèlement plat sur $\widetilde{R}[p^{-1}]$, $R[p^{-1}] \otimes_{\widetilde{R}[p^{-1}]} C \simeq C^r$ est fidèlement plat sur $R[p^{-1}]$, donc C est fidèlement plat sur $R[p^{-1}]$. \square

3.3. Localisation

Notons $T \subset \text{Spec}(\overline{R})$ l'ensemble des idéaux premiers minimaux de \overline{R} contenant p . Pour $\mathfrak{p} \in T$, on a $\mathfrak{p} \cap R_0 = pR_0$, car pR_0 est premier et $R_0 \rightarrow \overline{R}$ entier : T n'est autre que l'ensemble des idéaux premiers de \overline{R} au-dessus de pR_0 . L'ensemble T est muni d'une action transitive de \mathcal{G}_{R_0} (cf. [42, Theorem 9.3]). Pour $\mathfrak{p} \in T$, on note $\mathcal{G}_R(\mathfrak{p}) = \{g \in \mathcal{G}_R, g(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}\}$ le sous-groupe de décomposition de \mathcal{G}_R en \mathfrak{p} .

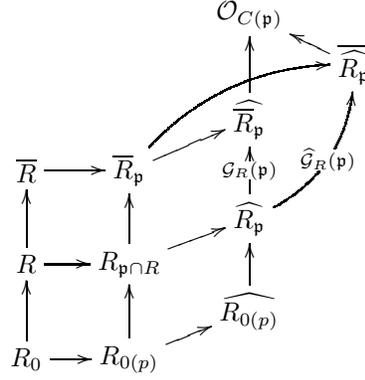
Pour tout $\mathfrak{p} \in T$, l'idéal $\mathfrak{p} \cap R$ est un idéal premier minimal de R contenant p . Comme R est noethérien et $\mathfrak{p} \cap R$ de hauteur 1, le localisé $R_{\mathfrak{p} \cap R}$ est un anneau de valuation discrète (cf. [42, Theorem 11.2]). On note $\widehat{R}_{\mathfrak{p}}$ son séparé complété pour la topologie p -adique. De même, on dispose de l'anneau de valuation discrète complet $\widehat{R}_{0(p)}$, et l'extension de corps $\widehat{R}_{\mathfrak{p}}[p^{-1}]/\widehat{R}_{0(p)}[p^{-1}]$ est finie. Choisissons une clôture algébrique $\overline{\widehat{R}_{\mathfrak{p}}}[p^{-1}]$ de $\widehat{R}_{\mathfrak{p}}[p^{-1}]$ contenant $\overline{R}_{\mathfrak{p}}$ et posons $\widehat{\mathcal{G}}_R(\mathfrak{p}) = \text{Gal}(\overline{\widehat{R}_{\mathfrak{p}}}[p^{-1}]/\widehat{R}_{\mathfrak{p}}[p^{-1}])$. On dispose d'un homomorphisme de restriction $\widehat{\mathcal{G}}_R(\mathfrak{p}) \rightarrow \mathcal{G}_R$. Ce dernier se factorise en $r_{\mathfrak{p}} : \widehat{\mathcal{G}}_R(\mathfrak{p}) \rightarrow \mathcal{G}_R(\mathfrak{p})$.

Lemme 3.3.1. — *L'homomorphisme $r_{\mathfrak{p}}$ est surjectif.*

Démonstration. — Un élément de $\mathcal{G}_R(\mathfrak{p})$ se prolonge de façon unique au complété $\widehat{R}_{\mathfrak{p}}$ de $\overline{R}_{\mathfrak{p}}$ pour la topologie p -adique. On a donc un homomorphisme injectif $i_{\mathfrak{p}} : \mathcal{G}_R(\mathfrak{p}) \rightarrow \text{Gal}(\widehat{\overline{R}_{\mathfrak{p}}}/\widehat{R}_{\mathfrak{p}})$. Le composé $i_{\mathfrak{p}} \circ r_{\mathfrak{p}} : \widehat{\mathcal{G}}_R(\mathfrak{p}) \rightarrow \text{Gal}(\widehat{\overline{R}_{\mathfrak{p}}}/\widehat{R}_{\mathfrak{p}})$ étant la projection canonique, $i_{\mathfrak{p}}$ est un isomorphisme et $r_{\mathfrak{p}}$ est surjectif. \square

On note $\mathcal{O}_{C(\mathfrak{p})}$ le séparé complété pour la topologie p -adique de l'anneau des entiers $\overline{\widehat{R}_{\mathfrak{p}}}$ du corps $\overline{\widehat{R}_{\mathfrak{p}}}[p^{-1}]$, et $C(\mathfrak{p}) = \mathcal{O}_{C(\mathfrak{p})}[p^{-1}]$. C'est un corps valué algébriquement clos, muni d'une action de $\widehat{\mathcal{G}}_R(\mathfrak{p})$. On a la situation

suiivante, où toutes les flèches sont toutes injectives (parce que les anneaux sont intègres et séparés pour la topologie p -adique).



Rappelons que d'après [36, Theorem 1], on a $C(\mathfrak{p})^{\widehat{\mathcal{G}}_R(\mathfrak{p})} = \widehat{R}_p$. D'après le lemme 3.3.1, on a donc $\widehat{R}_p^{\mathcal{G}_R(\mathfrak{p})} = \widehat{R}_p$.

Comme \overline{R} est une limite inductive de \widetilde{R} -algèbres finies et normales, l'homomorphisme naturel

$$\overline{R}/p^n \overline{R} \rightarrow \bigoplus_{\mathfrak{p} \in T} \overline{R}_p/p^n \overline{R}_p$$

est injectif. En passant à la limite projective, on en déduit un homomorphisme injectif

$$\widehat{R} \rightarrow \prod_{\mathfrak{p} \in T} \widehat{R}_p.$$

Remarque 3.3.2. — Action de \mathcal{G}_{R_0} sur $\prod_{\mathfrak{p} \in T} \widehat{R}_p$.

Soit $(h_{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{q}})_{(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}) \in T^2} \in \mathcal{G}_{R_0}^{T^2}$ telle que

- (1) $(\forall (\mathfrak{p}, \mathfrak{q}) \in T^2) h_{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{q}}(\mathfrak{p}) = \mathfrak{q}$;
- (2) $(\forall \mathfrak{p} \in T) h_{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{p}} = \text{Id}$;
- (3) $(\forall (\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3) \in T^3) h_{\mathfrak{p}_3}^{\mathfrak{p}_2} h_{\mathfrak{p}_2}^{\mathfrak{p}_1} = h_{\mathfrak{p}_3}^{\mathfrak{p}_1}$.

Il en existe : si on fixe $\mathfrak{p}_0 \in T$, l'action de \mathcal{G}_{R_0} sur T est transitive ([42, Theorem 9.3]), et pour tout $\mathfrak{p} \in T$, on peut choisir $h_{\mathfrak{p}} \in \mathcal{G}_{R_0}$ tel que $h_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{p}_0) = \mathfrak{p}$, il suffit de poser $h_{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{q}} = h_{\mathfrak{q}} h_{\mathfrak{p}}^{-1}$.

Pour $(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}) \in T^2$, l'application $h_{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{q}}: \overline{R}_p \rightarrow \overline{R}_q$ se prolonge en un isomorphisme équivariant de \widehat{R}_p (muni de l'action de $\mathcal{G}_{R_0}(\mathfrak{p})$) sur \widehat{R}_q (muni de l'action de $\mathcal{G}_{R_0}(\mathfrak{q})$), qu'on note encore $h_{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{q}}$.

Soient maintenant $(x_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p} \in T} \in \prod_{\mathfrak{p} \in T} \widehat{R}_p$ et $g \in \mathcal{G}_{R_0}$. Pour $\mathfrak{p} \in T$, on a $h_{g^{-1}\mathfrak{p}}^{\mathfrak{p}}(x_{g^{-1}\mathfrak{p}}) \in \widehat{R}_p$ et $gh_{\mathfrak{p}}^{g^{-1}\mathfrak{p}} \in \mathcal{G}_{R_0}(\mathfrak{p})$, de sorte que l'élément $(gh_{\mathfrak{p}}^{g^{-1}\mathfrak{p}})(h_{g^{-1}\mathfrak{p}}^{\mathfrak{p}}(x_{g^{-1}\mathfrak{p}})) \in \widehat{R}_p$ est bien défini. On pose alors

$$(*) \quad g((x_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p} \in T}) = ((gh_{\mathfrak{p}}^{g^{-1}\mathfrak{p}})(h_{g^{-1}\mathfrak{p}}^{\mathfrak{p}}(x_{g^{-1}\mathfrak{p}})))$$

ce qui définit une action de \mathcal{G}_{R_0} sur $\prod_{\mathfrak{p} \in T} \widehat{R}_p$. Il est immédiat que cette action est indépendante du choix de la famille $(h_{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{q}})_{(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}) \in T^2} \in \mathcal{G}_{R_0}^{T^2}$, parce qu'un autre choix est de la forme $(g_{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{q}} h_{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{q}})_{(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}) \in T^2} \in \mathcal{G}_{R_0}^{T^2}$ avec $g_{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{q}} \in \mathcal{G}_{R_0}(\mathfrak{q})$ et ces derniers se simplifient dans la formule (*). En outre, l'homomorphisme $\widehat{R} \rightarrow \prod_{\mathfrak{p} \in T} \widehat{R}_p$ est \mathcal{G}_{R_0} -équivariant.

Pour tout $\mathfrak{p} \in T$, la R_0 -algèbre \widehat{R}_p est en fait une $\widehat{R_0(p)}$ -algèbre, on en déduit donc un homomorphisme

$$\Psi: \widehat{R_0(p)} \otimes_{R_0} \widehat{R} \rightarrow \prod_{\mathfrak{p} \in T} \widehat{R}_p.$$

Proposition 3.3.3. — L'homomorphisme Ψ est injectif.

Démonstration. — Modulo p , l'homomorphisme Ψ est l'application

$$\Psi \otimes k: \text{Frac}(R_0/pR_0) \otimes_{R_0/pR_0} (\overline{R}/p\overline{R}) \rightarrow \bigoplus_{\mathfrak{p} \in T} \overline{R}_p/p\overline{R}_p.$$

Cette dernière est déduite de l'homomorphisme injectif $\overline{R}/p\overline{R} \rightarrow \bigoplus_{\mathfrak{p} \in T} \overline{R}_{\mathfrak{p}}/p\overline{R}_{\mathfrak{p}}$ par localisation : elle est injective.

Comme $\prod_{\mathfrak{p} \in T} \widehat{R}_{\mathfrak{p}}$ est sans p -torsion, on a $x \in \text{Ker}(\Psi) \Rightarrow x \in \bigcap_{n \in \mathbf{N}} p^n (\widehat{R}_{0(p)} \otimes_{R_0} \widehat{R})$: la proposition est équivalente à la proposition suivante. \square

Proposition 3.3.4. — *Le produit tensoriel $\widehat{R}_{0(p)} \otimes_{R_0} \widehat{R}$ est séparé pour la topologie p -adique.*

Commençons par prouver quelques résultats préliminaires.

Notation. Soient Λ est un ensemble et M un groupe abélien séparé et complet pour la topologie p -adique. On pose $M^{(\Lambda)} = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M$ et on note $M^{\{\Lambda\}}$ le séparé complété de l'anneau $M^{(\Lambda)}$ pour la topologie p -adique.

Lemme 3.3.5. — *Les applications $\widehat{R}_{0(p)}$ -linéaires*

$$f: \widehat{R}_{0(p)} \otimes_{R_0} R_0^{\{\Lambda\}} \rightarrow \left(\widehat{R}_{0(p)}\right)^{\{\Lambda\}} \quad \text{et} \quad g: \widehat{R}_{0(p)} \otimes_{R_0} R_0^{\Lambda} \rightarrow \left(\widehat{R}_{0(p)}\right)^{\Lambda}$$

déduites par extension des scalaires des inclusions $R_0^{\{\Lambda\}} \rightarrow \widehat{R}_{0(p)}^{\{\Lambda\}}$ et $R_0^{\Lambda} \rightarrow \widehat{R}_{0(p)}^{\Lambda}$ sont injectives.

Démonstration. — On a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \widehat{R}_{0(p)} \otimes_{R_0} R_0^{\{\Lambda\}} & \xrightarrow{f} & \widehat{R}_{0(p)}^{\{\Lambda\}} \\ h \downarrow & & \downarrow \\ \widehat{R}_{0(p)} \otimes_{R_0} R_0^{\Lambda} & \xrightarrow{g} & \widehat{R}_{0(p)}^{\Lambda} \end{array}$$

L'homomorphisme h est injectif car $\widehat{R}_{0(p)}$ est plat sur R_0 : il suffit de vérifier que g est injectif.

Soit $x = \sum_{n=1}^r x_n \otimes \underline{a}_n \in \widehat{R}_{0(p)} \otimes_{R_0} R_0^{\Lambda}$ tel que $g(x) = 0$, avec $x_n \in \widehat{R}_{0(p)}$ et $\underline{a}_n = (a_{n,\lambda})_{\lambda \in \Lambda} \in R_0^{\Lambda}$. Pour tout $\lambda \in \Lambda$, on a donc $\sum_{n=1}^r x_n a_{n,\lambda} = 0$ dans $\widehat{R}_{0(p)}$. Soit donc

$$\begin{aligned} u: R_0^r &\longrightarrow \widehat{R}_{0(p)} \\ (a_1, \dots, a_r) &\longmapsto \sum_{n=1}^r x_n a_n \end{aligned}$$

et $N = \text{Ker}(u)$. Comme R_0 est noethérien, N est de type fini sur R_0 : soient $(\alpha_j)_{1 \leq j \leq s}$ des générateurs de N sur R_0 . Écrivons $\alpha_j = (\alpha_{1,j}, \dots, \alpha_{r,j}) \in R_0^r$. Pour $\lambda \in \Lambda$, il existe donc $(b_{j,\lambda})_{1 \leq j \leq s} \in R_0^s$ tels que $a_\lambda := (a_{1,\lambda}, \dots, a_{r,\lambda}) = \sum_{j=1}^s \alpha_j b_{j,\lambda}$ (on a $a_\lambda \in N$). Pour tout $\lambda \in \Lambda$ et tout $n \in \{1, \dots, r\}$, on a donc $a_{n,\lambda} = \sum_{j=1}^s \alpha_{n,j} b_{j,\lambda}$.

Posons $\underline{b}_j = (b_{j,\lambda})_{\lambda \in \Lambda} \in R_0^{\Lambda}$. On a $\underline{a}_n = \sum_{j=1}^s \alpha_{n,j} \underline{b}_j$ d'où $x = \sum_{n=1}^r x_n \otimes \left(\sum_{j=1}^s \alpha_{n,j} \underline{b}_j \right) = \sum_{j=1}^s \left(\sum_{n=1}^r x_n \alpha_{n,j} \right) \otimes \underline{b}_j = 0$, vu que $\sum_{n=1}^r x_n \alpha_{n,j} = 0$. \square

Soit $\{B^{(n)}\}_{n \in \mathbf{N}}$ une suite croissante de sous- R_0 -algèbres finies et normales de \overline{R} . On pose $\mathcal{B} = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} B^{(n)}$ et on note $\widehat{\mathcal{B}} = \varprojlim_m \mathcal{B}/p^m \mathcal{B}$ le séparé complété de \mathcal{B} pour la topologie p -adique. On a un homomorphisme naturel $i: \widehat{\mathcal{B}} \rightarrow \widehat{\overline{R}}$. Il est injectif, car \mathcal{B} étant limite inductive de R_0 -algèbres normales, on a $\mathcal{B} \cap p^n \overline{R} = p^n \mathcal{B}$ pour tout $n \in \mathbf{N}_{>0}$. On identifie donc $\widehat{\mathcal{B}}$ à son image dans $\widehat{\overline{R}}$.

Définition 3.3.6. — Reprenons les notations de la section 3.2. En particulier, pour $m \in \mathbf{N}_{>0}$, on a $\pi_m = \varepsilon^{(m)} - 1 \in R_{0,\infty}$. Un $R_{0,\infty}$ -module M est dit presque projectif si pour tout $R_{0,\infty}$ -module N , le module $\text{Ext}_{R_{0,\infty}}^1(M, N)$ est tué par π_m pour tout $m \in \mathbf{N}_{>0}$. C'est en particulier le cas de toute $R_{0,\infty}$ -algèbre S_∞ qui est le normalisé de $S.R_{0,\infty}$ dans $\overline{R}[p^{-1}]$, où S est une sous- R_0 -algèbre finie normale de \overline{R} ([1, Theorem 5.1] et [22, Theorem 4]).

Les sous- R_0 -algèbres $B^{(n)}$ étant choisies comme plus haut, on note $B_\infty^{(n)}$ le normalisé de $B^{(n)}.R_{0,\infty}$ dans \overline{R} . Comme on vient de le rappeler, c'est un $R_{0,\infty}$ -module presque projectif. Conformément à ce qui précède, on pose $B_\infty = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} B_\infty^{(n)}$

Lemme 3.3.7. — *Le $R_{0,\infty}$ -module B_∞ est presque projectif.*

Démonstration. — Pour tout $R_{0,\infty}$ -module M , on a les égalités

$$\mathrm{Hom}_{R_{0,\infty}}(\mathcal{B}_\infty, M) = \mathrm{Hom}_{R_{0,\infty}}\left(\varprojlim_n B_\infty^{(n)}, M\right) = \varprojlim_n \mathrm{Hom}_{R_{0,\infty}}(B_\infty^{(n)}, M).$$

Soit $0 \rightarrow M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} M'' \rightarrow 0$ une suite exacte de $R_{0,\infty}$ -modules. La suite

$$0 \rightarrow \varprojlim_n \mathrm{Hom}_{R_{0,\infty}}(B_\infty^{(n)}, M') \rightarrow \varprojlim_n \mathrm{Hom}_{R_{0,\infty}}(B_\infty^{(n)}, M) \rightarrow \varprojlim_n \mathrm{Hom}_{R_{0,\infty}}(B_\infty^{(n)}, M'')$$

est exacte. Il s'agit donc de montrer que $\varprojlim_n \mathrm{Hom}_{R_{0,\infty}}(B_\infty^{(n)}, M) \rightarrow \varprojlim_n \mathrm{Hom}_{R_{0,\infty}}(B_\infty^{(n)}, M'')$ est presque surjectif

(i.e. de conoyau tué par π_n pour tout $n \in \mathbf{N}_{>0}$). Le $R_{0,\infty}$ -module $B_\infty^{(n)}$ étant presque projectif, on sait déjà que l'homomorphisme $\mathrm{Hom}_{R_{0,\infty}}(B_\infty^{(n)}, M) \rightarrow \mathrm{Hom}_{R_{0,\infty}}(B_\infty^{(n)}, M'')$ est presque surjectif pour tout $n \in \mathbf{N}$. On va utiliser un procédé à la Mittag-Leffler.

Lemme 3.3.8. — *Les homomorphismes $\mathrm{Hom}_{R_{0,\infty}}(B_\infty^{(n)}, M') \rightarrow \mathrm{Hom}_{R_{0,\infty}}(B_\infty^{(n-1)}, M')$ sont presque surjectifs.*

Démonstration. — Si $n \in \mathbf{N}_{>0}$, le lemme 9.1.7 affirme que $B_\infty^{(n-1)} \rightarrow B_\infty^{(n)}$ est un revêtement presque étale. D'après le lemme 9.1.9, l'homomorphisme $B_\infty^{(n-1)} \otimes_{R_{0,\infty}} B_\infty^{(n)} \rightarrow B_\infty^{(n)} \otimes_{R_{0,\infty}} B_\infty^{(n)}$ (dédié de l'inclusion $B_\infty^{(n-1)} \rightarrow B_\infty^{(n)}$) est presque facteur direct. L'homomorphisme

$$\mathrm{Hom}_{B_\infty^{(n)}}(B_\infty^{(n)} \otimes_{R_{0,\infty}} B_\infty^{(n)}, B_\infty^{(n)} \otimes_{R_{0,\infty}} M') \rightarrow \mathrm{Hom}_{B_\infty^{(n)}}(B_\infty^{(n)} \otimes_{R_{0,\infty}} B_\infty^{(n-1)}, B_\infty^{(n)} \otimes_{R_{0,\infty}} M')$$

(dédié de l'inclusion $B_\infty^{(n-1)} \rightarrow B_\infty^{(n)}$) est donc presque surjectif. Les $R_{0,\infty}$ -modules $B_\infty^{(n-1)}$ et $B_\infty^{(n)}$ sont presque projectifs de type fini donc presque de présentation finie. Comme $R_{0,\infty} \rightarrow B_\infty^{(n)}$ est presque plat, on a donc des presque isomorphismes $\mathrm{Hom}_{B_\infty^{(n)}}(B_\infty^{(n)} \otimes_{R_{0,\infty}} B_\infty^{(n-1)}, B_\infty^{(n)} \otimes_{R_{0,\infty}} M') \approx B_\infty^{(n)} \otimes_{R_{0,\infty}} \mathrm{Hom}_{R_{0,\infty}}(B_\infty^{(n-1)}, M')$ et $\mathrm{Hom}_{B_\infty^{(n)}}(B_\infty^{(n)} \otimes_{R_{0,\infty}} B_\infty^{(n)}, B_\infty^{(n)} \otimes_{R_{0,\infty}} M') \approx B_\infty^{(n)} \otimes_{R_{0,\infty}} \mathrm{Hom}_{R_{0,\infty}}(B_\infty^{(n)}, M')$ d'après le lemme 9.1.8. Par presque fidèle platitude de $B_\infty^{(n)}$ sur $R_{0,\infty}$, l'application $\mathrm{Hom}_{R_{0,\infty}}(B_\infty^{(n)}, M') \rightarrow \mathrm{Hom}_{R_{0,\infty}}(B_\infty^{(n-1)}, M')$ (dédié de l'inclusion $B_\infty^{(n-1)} \rightarrow B_\infty^{(n)}$) est presque surjective. \square

Soient $x'' = (x''_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \varprojlim_n \mathrm{Hom}_{R_{0,\infty}}(B_\infty^{(n)}, M'')$ et $m \in \mathbf{N}_{>0}$. Montrons qu'il existe une suite $(y_n)_{n \in \mathbf{N}}$ avec $y_n \in \mathrm{Hom}_{R_{0,\infty}}(B_\infty^{(n)}, M)$ telle que $v_*(y_n) = \pi_m x''_n$ et $y_n|_{B_\infty^{(n-1)}} = y_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbf{N}_{>0}$.

Si $n \in \mathbf{N}$, l'exactitude de la suite

$$0 \rightarrow \mathrm{Hom}_{R_{0,\infty}}(B_\infty^{(n)}, M') \rightarrow \mathrm{Hom}_{R_{0,\infty}}(B_\infty^{(n)}, M) \rightarrow \mathrm{Hom}_{R_{0,\infty}}(B_\infty^{(n)}, M'') \rightarrow (\approx 0)$$

montre qu'il existe $y_n^{(0)} \in \mathrm{Hom}_{R_{0,\infty}}(B_\infty^{(n)}, M)$ tel que $v_*(y_n^{(0)}) = \pi_{m+1} x''_n$. Soit $N \in \mathbf{N}_{>0}$. Supposons qu'on a construit une suite $y^{(N-1)} = (y_n^{(N-1)})_{n \in \mathbf{N}}$ avec $y_n^{(N-1)} \in \mathrm{Hom}_{R_{0,\infty}}(B_\infty^{(n)}, M)$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, telle que $v_*(y^{(N-1)}) = \left(\prod_{n=1}^N \pi_{m+n}\right) x''$ et telle que $y_n^{(N-1)}|_{B_\infty^{(n-1)}} = y_{n-1}^{(N-1)}$ pour tout $n < N$. Comme

$$v_*\left(y_{N|B_\infty^{(N-1)}}^{(N-1)} - y_{N-1}^{(N-1)}\right) = \left(\prod_{n=1}^N \pi_{m+n}\right) (x''_{N|B_\infty^{(N-1)}} - x''_{N-1}) = 0$$

(dans $\mathrm{Hom}_{R_{0,\infty}}(B_\infty^{(N-1)}, M'')$), on a $y_{N|B_\infty^{(N-1)}}^{(N-1)} - y_{N-1}^{(N-1)} \in \mathrm{Hom}_{R_{0,\infty}}(B_\infty^{(N-1)}, M')$. D'après la (presque) propriété de Mittag-Leffler (lemme 3.3.8), on a

$$\pi_{m+N+1}\left(y_{N|B_\infty^{(N-1)}}^{(N-1)} - y_{N-1}^{(N-1)}\right) \in \mathrm{Im}\left(\mathrm{Hom}_{R_{0,\infty}}(B_\infty^{(N)}, M') \rightarrow \mathrm{Hom}_{R_{0,\infty}}(B_\infty^{(N-1)}, M')\right)$$

i.e. il existe $z_N \in \mathrm{Hom}_{R_{0,\infty}}(B_\infty^{(N)}, M')$ tel que $z_N|_{B_\infty^{(N-1)}} = \pi_{m+N+1}\left(y_{N|B_\infty^{(N-1)}}^{(N-1)} - y_{N-1}^{(N-1)}\right)$ soit $\left(\pi_{m+N+1} y_N^{(N-1)} - z_N\right)|_{B_\infty^{(N-1)}} = \pi_{m+N+1} y_{N-1}^{(N-1)}$. On pose alors $y_n^{(N)} = \pi_{m+N+1} y_n^{(N-1)}$ si $n \neq N$ et $y_N^{(N)} = \pi_{m+N+1} y_N^{(N-1)} - z_N$. Par

construction, on a $y_n^{(N)} \in \mathrm{Hom}_{R_{0,\infty}}(B_\infty^{(n)}, M)$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, $v_*(y^{(N)}) = \left(\prod_{n=1}^{N+1} \pi_{m+n}\right) x''$ et $y_n^{(N)}|_{B_\infty^{(n-1)}} = y_{n-1}^{(N)}$ pour tout $n \leq N$.

On a $\pi_{n+1}^p \in \pi_n + pR_{0,n+1}$ donc $\pi_{n+1}^p R_{0,n+1} = \pi_n R_{0,n+1}$, d'où $\prod_{n=1}^N \pi_{m+n} R_{0,\infty} = \pi_{m+N}^{p \sum_{i=0}^{N-1} p^i} R_{0,m+N} \supseteq \pi_m R_{0,m+N}$

pour tout $N \in \mathbf{N}_{>0}$. Il existe donc $\lambda_{m,N} \in R_{0,\infty}$ tel que $\pi_m = \lambda_{m,N} \prod_{n=1}^N \pi_{m+n}$. Si $n > N+1$, on a alors

$$\lambda_{m,n} \prod_{r=N+2}^n \pi_{m+r} = \lambda_{m,N+1}. \text{ En multipliant l'égalité } v_*\left(\left(\prod_{r=2}^n \pi_{m+r}\right) y_n^{(0)} - \left(\prod_{r=N+2}^n \pi_{m+r}\right) z_N\right) = \left(\prod_{r=1}^n \pi_{m+r}\right) x''_n$$

(qui n'est autre que l'égalité $v_*(y^{(n-1)}) = \left(\prod_{r=1}^n \pi_{m+r} \right) x''$) par $\lambda_{m,n}$, on a $v_*(y_n) = \pi_m x''_n$ avec $y_n = \lambda_{m,1} y_n^{(0)} - \lambda_{m,N+1} z_n$. Par construction, $y = (y_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \varprojlim_n \text{Hom}_{R_{0,\infty}}(B_\infty^{(n)}, M)$ et $v_*(y) = \pi_m x''$ i.e.

$$\pi_m x'' \in \text{Im} \left(\varprojlim_n \text{Hom}_{R_{0,\infty}}(B_\infty^{(n)}, M) \rightarrow \varprojlim_n \text{Hom}_{R_{0,\infty}}(B_\infty^{(n)}, M'') \right).$$

Comme c'est vrai pour tout $m \in \mathbf{N}_{>0}$ et tout $x'' \in \varprojlim_n \text{Hom}_{R_{0,\infty}}(B_\infty^{(n)}, M'')$, on a bien la presque projectivité de \mathcal{B}_∞ sur $R_{0,\infty}$. \square

Lemme 3.3.9. — *Le produit tensoriel $\widehat{R_{0(p)}} \otimes_{R_0} \widehat{\mathcal{B}}$ est séparé pour la topologie p -adique.*

Démonstration. — D'après le lemme 3.3.7, il existe un $R_{0,\infty}$ -module libre L (qui est donc aussi un R_0 -module libre), des homomorphismes $R_{0,\infty}$ -linéaires $u: \mathcal{B}_\infty \rightarrow L$ et $v: L \rightarrow \mathcal{B}_\infty$ tels que le composé $\mathcal{B}_\infty \xrightarrow{u} L \xrightarrow{v} \mathcal{B}_\infty$ soit la multiplication par p (parce que $\pi_1 = \varepsilon^{(1)} - 1$ divise p). En complétant pour la topologie p -adique, on en déduit que le composé $\widehat{\mathcal{B}}_\infty \xrightarrow{\widehat{u}} \widehat{L} \xrightarrow{\widehat{v}} \widehat{\mathcal{B}}_\infty$ est la multiplication par p (où \widehat{L} est le séparé complété de L pour la topologie p -adique) et donc que le composé

$$\widehat{R_{0(p)}} \otimes_{R_0} \widehat{\mathcal{B}}_\infty \xrightarrow{\text{Id}_{\widehat{R_{0(p)}}} \otimes \widehat{u}} \widehat{R_{0(p)}} \otimes_{R_0} \widehat{L} \xrightarrow{\text{Id}_{\widehat{R_{0(p)}}} \otimes \widehat{v}} \widehat{R_{0(p)}} \otimes_{R_0} \widehat{\mathcal{B}}_\infty$$

est la multiplication par p . Si $x \in \bigcap_{m \in \mathbf{N}} p^m \left(\widehat{R_{0(p)}} \otimes_{R_0} \widehat{\mathcal{B}}_\infty \right)$, alors $(\text{Id}_{\widehat{R_{0(p)}}} \otimes \widehat{u})(x) = 0$ vu que $\widehat{R_{0(p)}} \otimes_{R_0} \widehat{L}$ est séparé pour la topologie p -adique d'après le lemme 3.3.5. Il en résulte que $px = 0$ et donc $x = 0$ dans $\widehat{R_{0(p)}} \otimes_{R_0} \widehat{\mathcal{B}}_\infty$ (comme $\mathcal{B} \subseteq \overline{\mathcal{R}}$ est sans p -torsion, il en est de même de $\widehat{\mathcal{B}}_\infty$ et donc de $\widehat{R_{0(p)}} \otimes_{R_0} \widehat{\mathcal{B}}_\infty$ par platitude de $\widehat{R_{0(p)}}$ sur R_0). L'homomorphisme $\widehat{\mathcal{B}} \rightarrow \widehat{\mathcal{B}}_\infty$ étant injectif, il en est de même de $\widehat{R_{0(p)}} \otimes_{R_0} \widehat{\mathcal{B}} \rightarrow \widehat{R_{0(p)}} \otimes_{R_0} \widehat{\mathcal{B}}_\infty$, et on a $x = 0$ dans $\widehat{R_{0(p)}} \otimes_{R_0} \widehat{\mathcal{B}}$. \square

Lemme 3.3.10. — *On a $\left(\widehat{R_{0(p)}} \otimes_{R_0} \widehat{\mathcal{B}} \right) \cap p \left(\widehat{R_{0(p)}} \otimes_{R_0} \widehat{\mathcal{R}} \right) = p \left(\widehat{R_{0(p)}} \otimes_{R_0} \widehat{\mathcal{B}} \right)$.*

Démonstration. — La suite $0 \rightarrow p\widehat{\mathcal{B}} \rightarrow \widehat{\mathcal{B}} \rightarrow \widehat{\mathcal{R}}/p\widehat{\mathcal{R}}$ est exacte. Il en est donc de même de la suite $0 \rightarrow p \left(\widehat{R_{0(p)}} \otimes_{R_0} \widehat{\mathcal{B}} \right) \rightarrow \left(\widehat{R_{0(p)}} \otimes_{R_0} \widehat{\mathcal{B}} \right) \rightarrow \left(\widehat{R_{0(p)}} \otimes_{R_0} \widehat{\mathcal{R}} \right) / p \left(\widehat{R_{0(p)}} \otimes_{R_0} \widehat{\mathcal{R}} \right)$ par platitude de $\widehat{R_{0(p)}}$ sur R_0 . \square

Lemme 3.3.11. — *Si $x \in \widehat{R_{0(p)}} \otimes_{R_0} \widehat{\mathcal{B}}$ est tel que $x \in \bigcap_{m \in \mathbf{N}} p^m \left(\widehat{R_{0(p)}} \otimes_{R_0} \widehat{\mathcal{R}} \right)$, alors $x = 0$.*

Démonstration. — L'anneau $\widehat{R_{0(p)}} \otimes_{R_0} \widehat{\mathcal{R}}$ n'a pas de p -torsion car $\widehat{\mathcal{R}}$ n'a pas de p -torsion (proposition 2.0.3) et $\widehat{R_{0(p)}}$ est plat sur R_0 . Pour $m \in \mathbf{N}$, il existe donc un unique $x_m \in \widehat{R_{0(p)}} \otimes_{R_0} \widehat{\mathcal{R}}$ tel que $x = p^m x_m$. En particulier, on a $x_m = p x_{m+1}$ pour tout $m \in \mathbf{N}$. Supposons que $x_m \in \widehat{R_{0(p)}} \otimes_{R_0} \widehat{\mathcal{B}}$ pour un certain $m \in \mathbf{N}$. On a $x_m = p x_{m+1} \in \left(\widehat{R_{0(p)}} \otimes_{R_0} \widehat{\mathcal{B}} \right) \cap p \left(\widehat{R_{0(p)}} \otimes_{R_0} \widehat{\mathcal{R}} \right) = p \left(\widehat{R_{0(p)}} \otimes_{R_0} \widehat{\mathcal{B}} \right)$ d'après le lemme 3.3.10, d'où $x_{m+1} \in \widehat{R_{0(p)}} \otimes_{R_0} \widehat{\mathcal{B}}$ vu que $\widehat{R_{0(p)}} \otimes_{R_0} \widehat{\mathcal{R}}$ n'a pas de p -torsion. Une récurrence montre donc que $x_m \in \widehat{R_{0(p)}} \otimes_{R_0} \widehat{\mathcal{B}}$ pour tout $m \in \mathbf{N}$. On a donc $x \in \bigcap_{m \in \mathbf{N}} p^m \left(\widehat{R_{0(p)}} \otimes_{R_0} \widehat{\mathcal{B}} \right)$ d'où $x = 0$ d'après le lemme 3.3.9. \square

Démonstration de la proposition 3.3.4. — Soit $x = \sum_{j=1}^r a_j \otimes x_j \in \bigcap_{m \in \mathbf{N}} p^m \left(\widehat{R_{0(p)}} \otimes_{R_0} \widehat{\mathcal{R}} \right)$, avec $a_j \in \widehat{R_{0(p)}}$ et $x_j \in \widehat{\mathcal{R}}$. Pour $j \in \{1, \dots, r\}$, on a $x_j = \sum_{n=0}^{\infty} p^n x_{j,n}$ avec $x_{j,n} \in \overline{\mathcal{R}}$. La sous- R_0 -algèbre de $\overline{\mathcal{R}}$ engendrée par la famille $\{x_{j,n}\}_{1 \leq j \leq r, n \in \mathbf{N}}$ est réunion dénombrable de R -algèbres finies : elle est donc contenue dans une R_0 -algèbre \mathcal{B} , réunion croissante dénombrable de R_0 -algèbres finies et normales. On a alors $x \in \widehat{R_{0(p)}} \otimes_{R_0} \widehat{\mathcal{B}} \subseteq \widehat{R_{0(p)}} \otimes_{R_0} \widehat{\mathcal{R}}$. D'après le lemme 3.3.11, on a $x = 0$ ce qu'on voulait. \square

CHAPITRE 4

RAPPELS SUR L'ANNEAU B_{HT} DE HYODO

4.1. L'anneau B_{HT} et sa cohomologie galoisienne

Dans [37], Hyodo a construit un anneau B_{HT}^0 (qu'il note S_∞ dans *loc. cit.*, ce qu'on va éviter pour des raisons assez claires), qui lui sert à définir la notion de représentation de Hodge-Tate dans le cas relatif. L'objet de cette partie est de rappeler cette construction et les propriétés galoisiennes de cet anneau.

On dispose d'une extension canonique (construite par Faltings)

$$0 \rightarrow C \rightarrow M \rightarrow \widehat{\Omega}_R^1 \otimes_R C(-1) \rightarrow 0$$

dont la construction est rappelée dans la section 3.1. Elle est \mathcal{G}_R -équivariante et scindée, mais pas de façon canonique ni équivariante. Pour $n \in \mathbf{N}_{>0}$, on pose $B_{\text{HT},n}^0 = \text{Sym}_C^n M$ et $B_{\text{HT}}^0 = \varinjlim_n B_{\text{HT},n}^0$, les morphismes de transition $B_{\text{HT},n}^0 \rightarrow B_{\text{HT},n+1}^0$ étant donnés par $[x_1 \otimes \cdots \otimes x_n] \mapsto [1 \otimes x_1 \otimes \cdots \otimes x_n]$. Explicitons cet anneau. Choisissons une base t du \mathcal{G}_R -module $\mathbf{Z}_p(1)$ (on a donc $g(t) = \chi(g)t$ pour tout $g \in \mathcal{G}_R$). Rappelons que

$$M = C \frac{d \log(\varepsilon)}{t} \oplus \bigoplus_{i=1}^d C \frac{d \log(\tilde{T}_i)}{t}$$

où $d \log(\varepsilon) = (d \log(\varepsilon^{(n)}))_{n \in \mathbf{N}}$ et $d \log(\tilde{T}_i) = (d \log(T_i^{(n)}))_{n \in \mathbf{N}}$ pour $i \in \{1, \dots, d\}$. L'action de \mathcal{G}_R est semi-linéaire et vérifie $g(t^{-1} d \log(\varepsilon)) = t^{-1} d \log(\varepsilon)$ et $g(t^{-1} d \log(\tilde{T}_i)) = \chi(g)^{-1} t^{-1} d \log(\tilde{T}_i) + \chi(g)^{-1} c_i(g) t^{-1} d \log(\varepsilon)$ où $c_i: \mathcal{G}_R \rightarrow \mathbf{Z}_p$ est défini par $g(T_i^{(n)}) = (\varepsilon^{(n)})^{c_i(g)} T_i^{(n)}$ pour $g \in \mathcal{G}_R$ et $n \in \mathbf{N}$.

Munissons l'anneau de polynômes $C[V_1, \dots, V_d]$ de l'action (semi-linéaire) de \mathcal{G}_R donnée par

$$g(V_i) = \chi(g)^{-1} (V_i + c_i(g))$$

pour $i \in \{1, \dots, d\}$. Pour $n \in \mathbf{N}_{>0}$, on note $C_{\leq n}[V_1, \dots, V_d]$ le sous- C -module des polynômes de degré $\leq n$. Ce dernier est stable sous \mathcal{G}_R . On définit une application C -linéaire en posant

$$f_n: C_{\leq n}[V_1, \dots, V_d] \longrightarrow B_{\text{HT},n}^0$$

$$V_1^{n_1} \cdots V_d^{n_d} \longmapsto \left[(t^{-1} d \log(\varepsilon))^{\otimes (n - |\underline{n}|)} \otimes (t^{-1} d \log(\tilde{T}_1))^{\otimes n_1} \otimes \cdots \otimes (t^{-1} d \log(\tilde{T}_d))^{\otimes n_d} \right]$$

pour $\underline{n} = (n_1, \dots, n_d) \in \mathbf{N}^d$ tel que $|\underline{n}| = n_1 + \cdots + n_d \leq n$. La description explicite de M montre que c'est un isomorphisme \mathcal{G}_R -équivariant (remarquons qu'ici $t^{-1} d \log(\varepsilon)$ « joue le rôle » du 1 dans la formule $[1 \otimes x_1 \otimes \cdots \otimes x_n]$ donnant les morphismes de transition). Par ailleurs, la famille $(f_n)_{n \in \mathbf{N}_{>0}}$ est un système inductif. En passant à la limite, on obtient un isomorphisme \mathcal{G}_R -équivariant

$$C[V_1, \dots, V_d] \xrightarrow{\sim} B_{\text{HT}}^0.$$

Lemme 4.1.1. — Soit A une \mathbf{Q}_p -algèbre et $c \in \mathbf{Q}_p^\times$. Munissons l'anneau de polynômes $A[V]$ de l'action de $\mathbf{Z}_p \gamma$ définie par $\gamma(V) = V + c$ (l'action étant triviale sur A). On a alors

$$H^q(\mathbf{Z}_p \gamma, A[V]) = \begin{cases} A & \text{si } q = 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. — La cohomologie en question est calculée par le complexe suivant

$$\cdots \rightarrow 0 \rightarrow A[V] \xrightarrow{\gamma-1} A[V] \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$$

Posons $P_0(V) = 1$, $P_1(V) = V$ et $P_n(V) = V(V - c) \cdots (V - (n - 1)c)$ pour $n \geq 2$. La famille $(P_n(V))_{n \in \mathbf{N}}$ est une base de $A[V]$. Par ailleurs, on a $(\gamma - 1)(P_n(V)) = ncP_{n-1}(V)$. Comme $c \neq 0$, on en déduit que $\gamma - 1$ est surjectif sur $A[V]$, et que son noyau est $AP_0 = A$, ce qu'on voulait. \square

Rappelons que $\tilde{\mathcal{H}}_R = \text{Ker}(\mathcal{G}_R \rightarrow \Gamma_K)$.

Proposition 4.1.2. — *On a*

$$H^q(\tilde{\mathcal{H}}_R, B_{\text{HT}}^0) = \begin{cases} H^0(\tilde{\mathcal{H}}_R, C) & \text{si } q = 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. — Posons $\mathcal{P} = C^{\mathcal{H}_R}[V_1, \dots, V_d] = (C[V_1, \dots, V_d])^{\mathcal{H}_R}$, muni de l'action de Γ_R induite par celle décrite plus haut (action semi-linéaire telle que $g(V_i) = \chi(g)^{-1}(V_i + c_i(g))$), et $\tilde{\mathcal{P}} = C^{\tilde{\mathcal{H}}_R}[V_1, \dots, V_d] \subset \mathcal{P}$ muni de l'action induite. Comme $H^q(\mathcal{H}_R, C) = 0$ pour $q > 0$ (cf. proposition 3.1.1), et comme on a un isomorphisme de \mathcal{G}_R -modules $C[V_1, \dots, V_d] \xrightarrow{\sim} B_{\text{HT}}^0$, il s'agit de calculer $H^\bullet(\tilde{\Gamma}_R, \mathcal{P})$.

Filtrons \mathcal{P} par $\text{fil}^n \mathcal{P} = C_{\leq n}^{\mathcal{H}_R}[V_1, \dots, V_d]$ (polynômes de degré $\leq n$) et $\tilde{\mathcal{P}}$ par la filtration induite. La filtration est stable pour l'action de Γ_R . Les gradués associés sont donnés par $\text{gr}^n \tilde{\mathcal{P}} = \left(\text{Sym}_{C^{\tilde{\mathcal{H}}_R}}^n \left(\bigoplus_{i=1}^d C^{\tilde{\mathcal{H}}_R} \bar{V}_i \right) \right) (-n)$ et $\text{gr}^n \mathcal{P} = \left(\text{Sym}_{C^{\mathcal{H}_R}}^n \left(\bigoplus_{i=1}^d C^{\mathcal{H}_R} \bar{V}_i \right) \right) (-n) = C^{\mathcal{H}_R} \otimes_{C^{\tilde{\mathcal{H}}_R}} \text{gr}^n \tilde{\mathcal{P}}$, où l'action de Γ_R sur les \bar{V}_i est triviale.

Comme $\tilde{\Gamma}_R = \bigoplus_{i=1}^d \mathbf{Z}_p \gamma_i^{(R)}$ est un \mathbf{Z}_p -module libre, sa cohomologie à valeurs dans $\text{fil}^n \mathcal{P}$ (resp. $\tilde{\mathcal{P}}$) est donnée par le complexe de Koszul

$$K_n^\bullet(\mathcal{P}): \quad \cdots \rightarrow 0 \rightarrow \text{fil}^n \mathcal{P} \rightarrow (\text{fil}^n \mathcal{P})^d \rightarrow \cdots \rightarrow \bigwedge^q (\text{fil}^n \mathcal{P})^d \rightarrow \cdots \rightarrow \text{fil}^n \mathcal{P} \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$$

associé à la suite $(\gamma_1^{(R)} - 1, \dots, \gamma_d^{(R)} - 1)$ (resp. par le complexe de Koszul $K_n^\bullet(\tilde{\mathcal{P}})$, cf. preuve du lemme 3.1.4). Il est filtré par

$$F^r K_n^\bullet(\mathcal{P}): \quad \cdots \rightarrow 0 \rightarrow \text{fil}^{n-r} \mathcal{P} \rightarrow (\text{fil}^{n-r} \mathcal{P})^d \rightarrow \cdots \rightarrow \bigwedge^q (\text{fil}^{n-r} \mathcal{P})^d \rightarrow \cdots \rightarrow \text{fil}^{n-r} \mathcal{P} \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$$

(resp. par la filtration induite). Le gradué pour cette filtration est

$$G^{r,r} K_n^\bullet(\mathcal{P}) = K_n^\bullet(\text{gr}^{n-r} \mathcal{P}): \quad \cdots \rightarrow 0 \rightarrow \text{gr}^{n-r} \mathcal{P} \rightarrow (\text{gr}^{n-r} \mathcal{P})^d \rightarrow \cdots \rightarrow \bigwedge^q (\text{gr}^{n-r} \mathcal{P})^d \rightarrow \cdots$$

(resp. $G^{r,r} K_n^\bullet(\tilde{\mathcal{P}}) = K_n^\bullet(\text{gr}^{n-r} \tilde{\mathcal{P}})$). En tant que $\tilde{\Gamma}_R$ -module, $\text{gr}^{n-r} \tilde{\mathcal{P}}$ est trivial (c'est un $C^{\tilde{\mathcal{H}}_R}$ -module libre), et $\text{gr}^{n-r} \mathcal{P} = C^{\mathcal{H}_R} \otimes_{C^{\tilde{\mathcal{H}}_R}} \text{gr}^{n-r} \tilde{\mathcal{P}}$. Or d'après le lemme 3.1.4, l'inclusion $C^{\tilde{\mathcal{H}}_R} \rightarrow C^{\mathcal{H}_R}$ induit un isomorphisme sur la cohomologie des complexes de Koszul associés, il en est donc de même pour l'inclusion $\text{gr}^{n-r} \tilde{\mathcal{P}} \rightarrow \text{gr}^{n-r} \mathcal{P}$: on a $H^q(G^{r,r} K_n^\bullet(\tilde{\mathcal{P}})) \xrightarrow{\sim} H^q(G^{r,r} K_n^\bullet(\mathcal{P}))$ pour tout $q \in \mathbf{N}$.

On a les suites spectrales pour les complexes filtrés $E_1^{r,q} = H^{r+q}(G^{r,r} K_n^\bullet(\mathcal{P})) \Rightarrow H^{r+q}(K_n^\bullet(\mathcal{P}))$ et $\tilde{E}_1^{r,q} = H^{r+q}(G^{r,r} K_n^\bullet(\tilde{\mathcal{P}})) \Rightarrow H^{r+q}(K_n^\bullet(\tilde{\mathcal{P}}))$. D'après ce qui précède, l'inclusion $\text{gr}^{n-r} \tilde{\mathcal{P}} \rightarrow \text{gr}^{n-r} \mathcal{P}$ induit un isomorphisme $\tilde{E}_1^{r,q} \xrightarrow{\sim} E_1^{r,q}$: il en est de même sur l'aboutissement, i.e. on a $H^\bullet(K_n^\bullet(\tilde{\mathcal{P}})) \xrightarrow{\sim} H^\bullet(K_n^\bullet(\mathcal{P}))$ soit encore $H^\bullet(\tilde{\Gamma}_R, \tilde{\mathcal{P}}) \xrightarrow{\sim} H^\bullet(\tilde{\Gamma}_R, \mathcal{P})$. On a donc $H^\bullet(\tilde{\mathcal{H}}_R, B_{\text{HT}}^0) \simeq H^\bullet(\tilde{\Gamma}_R, \tilde{\mathcal{P}})$.

En appliquant le lemme 4.1.1 à $A = C^{\tilde{\mathcal{H}}_R}[V_1, \dots, V_{i-1}]$, $V = V_i$, $\gamma = \gamma_i^{(R)}$ et $c = c_i(\gamma_i^{(R)})$, on obtient

$$H^q(\mathbf{Z}_p \gamma_i^{(R)}, C^{\tilde{\mathcal{H}}_R}[V_1, \dots, V_i]) = \begin{cases} C^{\tilde{\mathcal{H}}_R}[V_1, \dots, V_{i-1}] & \text{si } q = 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Une application répétée de la suite spectrale de Hochschild-Serre (pour la filtration $\{0\} \subset \mathbf{Z}_p \gamma_1^{(R)} \subset \cdots \subset \bigoplus_{j=1}^i \mathbf{Z}_p \gamma_j^{(R)} \subset \cdots \subset \tilde{\Gamma}_R$) implique alors que

$$H^q(\tilde{\Gamma}_R, \tilde{\mathcal{P}}) = \begin{cases} C^{\tilde{\mathcal{H}}_R} & \text{si } q = 0 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

ce qui achève la preuve. \square

Proposition 4.1.3. — *On a*

$$H^q(\mathcal{G}_R, B_{\text{HT}}^0(r)) = \begin{cases} R[p^{-1}] & \text{si } r = 0 \text{ et } q = 0, 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. — D'après la propriété 4.1.2, on a $H^0(\tilde{\mathcal{H}}_R, B_{\text{HT}}^0) = H^0(\tilde{\mathcal{H}}_R, C) = R[p^{-1}] \otimes_K \widehat{K}_\infty$ et $H^q(\tilde{\mathcal{H}}_R, B_{\text{HT}}^0) = 0$ si $q > 0$. On a donc $H^q(\mathcal{G}_R, B_{\text{HT}}^0) = H^q(\Gamma_K, R[p^{-1}] \otimes_K \widehat{K}_\infty)$ pour tout $q \in \mathbf{N}$. On conclut grâce à [46, Theorems 1 & 2], qui affirment que

$$H^q(\Gamma_K, \widehat{K}_\infty(r)) \simeq \begin{cases} K & \text{si } r = 0 \text{ et } q = 0, 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

□

Hyodo pose ensuite $B_{\text{HT}} = \bigoplus_{r \in \mathbf{Z}} B_{\text{HT}}^0(r)$. D'après ce qui précède, on a un isomorphisme \mathcal{G}_R -équivariant

$$C[V_1, \dots, V_d, t, t^{-1}] \xrightarrow{\sim} B_{\text{HT}}.$$

Corollaire 4.1.4. — *On a*

$$H^q(\mathcal{G}_R, B_{\text{HT}}) = \begin{cases} R[p^{-1}] & \text{si } q = 0, 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

4.2. Finitude de $D_{\text{HT}}(V)$

Soit $V \in \mathbf{Rep}_{\mathbf{Q}_p}(\mathcal{G}_R)$ (cf. définition 8.0.5). On pose $D_{\text{HT}}(V) = (B_{\text{HT}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\mathcal{G}_R}$ et $D_{\text{HT}}^0(V) = (B_{\text{HT}}^0 \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\mathcal{G}_R}$. Ce sont des $R[p^{-1}]$ -modules. On veut montrer que $D_{\text{HT}}(V)$ est fini sur $R[p^{-1}]$ (proposition 4.2.6).

Première réduction : il suffit de montrer que $D_{\text{HT}}^0(V)$ est fini sur $R[p^{-1}]$.

On a $D_{\text{HT}}(V) = \bigoplus_{j \in \mathbf{Z}} D_{\text{HT}}^0(V(j))$. Il s'agit de voir que $D_{\text{HT}}^0(V(j)) = 0$ sauf pour un nombre fini de $j \in \mathbf{Z}$.

On a un homomorphisme injectif d'anneaux (cf. section 3.3) $\Psi: \widehat{R} \rightarrow \prod_{\mathfrak{p} \in T} \widehat{R}_{\mathfrak{p}}$. Ce dernier induit un homomorphisme injectif

$$C \otimes_{\mathbf{Q}_p} V(j) \rightarrow \prod_{\mathfrak{p} \in T} C(\mathfrak{p}) \otimes_{\mathbf{Q}_p} V(j)$$

et donc

$$\Psi: (C \otimes_{\mathbf{Q}_p} V(j))^{\mathcal{G}_R} \rightarrow \prod_{\mathfrak{p} \in T} (C(\mathfrak{p}) \otimes_{\mathbf{Q}_p} V(j))^{\mathcal{G}_R(\mathfrak{p})}.$$

Soit $x \in (C \otimes_{\mathbf{Q}_p} V(j))^{\mathcal{G}_R}$ et $\Psi(x) = (x_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p} \in T}$. Si $\mathfrak{q} \in T$ est conjugué de \mathfrak{p} sous \mathcal{G}_R , alors $x_{\mathfrak{p}} = 0 \Leftrightarrow x_{\mathfrak{q}} = 0$.

Mais si $\mathfrak{p} \in T$ est fixé, il n'existe qu'un nombre fini d'entiers $j \in \mathbf{Z}$ tels que $(C(\mathfrak{p}) \otimes_{\mathbf{Q}_p} V(j))^{\mathcal{G}_R(\mathfrak{p})} \neq 0$ (les poids de Hodge-Tate de la représentation $V|_{\mathcal{G}_R(\mathfrak{p})}$).

D'après ce qui précède, ces entiers ne dépendent que de l'orbite de \mathfrak{p} sous \mathcal{G}_R . Comme il n'y a qu'un nombre fini d'orbites (si $R[p^{-1}]$ est galoisienne sur $R_0[p^{-1}]$, il y en a autant que d'idéaux premiers de R au-dessus de pR_0), il n'y a qu'un nombre fini de $j \in \mathbf{Z}$ tel qu'il existe $\mathfrak{p} \in T$ avec $(C(\mathfrak{p}) \otimes_{\mathbf{Q}_p} V(j))^{\mathcal{G}_R(\mathfrak{p})} \neq 0$, et *a fortiori* $D_{\text{HT}}^0(V(j)) \neq 0$.

Rappelons (cf. début de 4.1), que $B_{\text{HT}}^0 = C[V_1, \dots, V_d]$, l'action de \mathcal{G}_R étant semi-linéaire, et telle que $g(V_i) = \chi(g)^{-1}(V_i + c_i(g))$ où $c_i: \mathcal{G}_R \rightarrow \mathbf{Z}_p(1)$ est un cocycle trivial sur \mathcal{H}_R . En particulier, l'action de \mathcal{H}_R est triviale sur V_1, \dots, V_d : on a $D_{\text{HT}}^0(V) = \left((C \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\mathcal{H}_R}[V_1, \dots, V_d] \right)^{\Gamma_R}$.

Deuxième réduction : on peut supposer que $\widehat{\mathcal{W}}_\infty = (C \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\mathcal{H}_R}$ est libre de rang n sur $\widehat{R}_\infty[p^{-1}]$.

D'après [2, Proposition 3.6], il existe une sous- R -algèbre S de \widehat{R} telle que $S[p^{-1}]/R[p^{-1}]$ est finie étale galoisienne, et telle que si $\widehat{\mathcal{W}}_S = (C \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\mathcal{H}_S}$, alors $\widehat{\mathcal{W}}_S$ est un $\widehat{S}_\infty[p^{-1}]$ -module libre et $C \otimes_{\mathbf{Q}_p} V \simeq C \otimes_{\widehat{S}_\infty[p^{-1}]} \widehat{\mathcal{W}}_S$ en tant que \mathcal{G}_R -modules. Comme $S[p^{-1}]$ est fini sur $R[p^{-1}]$, si $(B_{\text{HT}}^0 \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\mathcal{G}_S}$ est fini sur $S[p^{-1}]$, il l'est *a fortiori* sur $R[p^{-1}]$, et c'est encore le cas du sous- $R[p^{-1}]$ -module $(B_{\text{HT}}^0 \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\mathcal{G}_R}$ vu que $R[p^{-1}]$ est noethérien. Quitte à remplacer R par S , on peut donc supposer que $\widehat{\mathcal{W}}_\infty = (C \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\mathcal{H}_R}$ est libre de rang n sur $\widehat{R}_\infty[p^{-1}]$.

D'après [2, Théorème 3.1], il existe un entier m et une base e_1, \dots, e_n de $\widehat{\mathcal{W}}_\infty$ telle que le cocycle $\Gamma_R \rightarrow \mathrm{GL}_n(\widehat{R}_\infty[p^{-1}])$ défini par $\widehat{\mathcal{W}}_\infty$ est à valeurs dans $\mathrm{GL}_n(R_m[p^{-1}])$. Quitte à remplacer R par R_m (cf. deuxième réduction), on peut supposer $R_m = R$. Posons alors $\mathcal{W}_\infty = \bigoplus_{j=1}^n R_\infty[p^{-1}]e_j \subset \widehat{\mathcal{W}}_\infty$: on a $\widehat{\mathcal{W}}_\infty = \widehat{R}_\infty[p^{-1}] \otimes_{R_\infty[p^{-1}]} \mathcal{W}_\infty$. Rappelons qu'on a

$$D_{\mathrm{HT}}^0(V) = \left((C \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\mathcal{H}_R} [V_1, \dots, V_d] \right)^{\Gamma_R} = \left(\widehat{\mathcal{W}}_\infty [V_1, \dots, V_d] \right)^{\Gamma_R}.$$

Lemme 4.2.1. — (cf. lemme 4.1.1) Soit D un \mathbf{Q}_p -espace vectoriel et $c \in \mathbf{Q}_p^\times$. Supposons D muni d'une action par automorphismes de $\Gamma = \mathbf{Z}_p \gamma$ et munissons $\mathbf{Q}_p[V]$ de l'action de Γ donnée par $\gamma(V) = V + c$. Posons $D[V] = D \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathbf{Q}_p[V]$, muni de l'action produit. Alors on a un isomorphisme

$$\begin{aligned} f_\gamma: D^{\Gamma\text{-uni}} &\longrightarrow (D[V])^\Gamma \\ x &\longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{c^n n!} (\gamma^{-1} - 1)^n(x) \otimes P_n(V) \end{aligned}$$

où $D^{\Gamma\text{-uni}} = \{x \in D, (\exists N \in \mathbf{N}) (1 - \gamma)^N(x) = 0\}$.

Démonstration. — Pour $n \in \mathbf{N}$, posons $P_n(V) = V(V - c) \cdots (V - (n - 1)c)$ (on a $P_0(V) = 1$ et $P_1(V) = V$). C'est une base du \mathbf{Q}_p -espace vectoriel $\mathbf{Q}_p[V]$. Par ailleurs, on a $(1 - \gamma)(P_n(V)) = ncP_{n-1}(V)$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Un élément $y \in D[V]$ s'écrit donc de façon unique

$$y = \sum_{n=0}^N y_n \otimes P_n(V)$$

avec $y_n \in D$. On a alors

$$(1 - \gamma)(y) = \sum_{n=0}^N (1 - \gamma)(y_n) \otimes P_n(V) + \gamma(y_n) \otimes ncP_{n-1}(V).$$

Ainsi, on a $\gamma(y) = y$ si et seulement si $(1 - \gamma)(y_n) + (n + 1)c\gamma(y_{n+1}) = 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ (en posant $y_n = 0$ pour $n > N$), i.e. $y_{n+1} = \frac{-1}{(n+1)c} \gamma^{-1}((1 - \gamma)(y_n))$. On a donc

$$y_n = \frac{(-1)^n}{c^n n!} \gamma^{-n}((1 - \gamma)^n(y_0))$$

pour tout $n \in \mathbf{N}$, et $y_{N+1} = 0 \Leftrightarrow (1 - \gamma)^{N+1}(y_0) = 0$. L'application f_γ est donc bien définie et c'est un isomorphisme. \square

Remarque 4.2.2. — Avec les notations du lemme qui précède, si $\gamma\eta = \eta\gamma$ et si $(1 - \gamma)^N(x) = 0$, $(1 - \eta)^M(x) = 0$ pour $x \in D$, on a $(1 - \gamma\eta)^{M+N}(x) = 0$, et donc $(D^{\mathbf{Z}_p \gamma\text{-uni}})^{\mathbf{Z}_p \eta\text{-uni}} = D^{(\mathbf{Z}_p \gamma + \mathbf{Z}_p \eta)\text{-uni}}$.

Pour $n \in \mathbf{N}$ et $c \in \mathbf{Q}_p$, posons $P_{n,c}(V) = V(V - c) \cdots (V - (n - 1)c)$.

Lemme 4.2.3. — Si $c \in \mathbf{Z}_p \setminus \{0\}$, on a un isomorphisme

$$\begin{aligned} f_c: \widehat{\mathcal{W}}_\infty^{c\tilde{\Gamma}_{\bar{R}}\text{-uni}} &\longrightarrow \left(\widehat{\mathcal{W}}_\infty [V_1, \dots, V_d] \right)^{c\tilde{\Gamma}_{\bar{R}}} \\ x &\longmapsto \sum_{\underline{n} \in \mathbf{N}^d} \frac{(-1)^{|\underline{n}|}}{c^{|\underline{n}|} \underline{n}!} (\underline{\gamma}^{-c} - 1)^{\underline{n}}(x) \otimes P_{\underline{n},c}(\underline{V}) \end{aligned}$$

où pour $\underline{n} = (n_1, \dots, n_d) \in \mathbf{N}^d$, on a $(\underline{\gamma}^{-c} - 1)^{\underline{n}} = \prod_{i=1}^d (\gamma_i^{-c} - 1)^{n_i}$ et $P_{\underline{n},c}(\underline{V}) = \prod_{i=1}^d P_{n_i,c}(V_i)$.

Démonstration. — D'après la remarque qui précède, il suffit d'appliquer le lemme 4.2.1 successivement à

$$\widehat{\mathcal{W}}_\infty^{c(\mathbf{Z}_p \gamma_{i+1} \oplus \cdots \oplus \mathbf{Z}_p \gamma_d)\text{-uni}} [V_1, \dots, V_i]$$

pour $i = d, d - 1, \dots, 1$, car on a $\left(\widehat{\mathcal{W}}_\infty [V_1, \dots, V_i] \right)^{c(\mathbf{Z}_p \gamma_{i+1} \oplus \cdots \oplus \mathbf{Z}_p \gamma_d)\text{-uni}} = \widehat{\mathcal{W}}_\infty^{c(\mathbf{Z}_p \gamma_{i+1} \oplus \cdots \oplus \mathbf{Z}_p \gamma_d)\text{-uni}} [V_1, \dots, V_i]$ vu que l'action de $\gamma_{i+1}, \dots, \gamma_d$ sur V_1, \dots, V_i est triviale. \square

Lemme 4.2.4. — Si $g \in \mathcal{Z}_0^{\mathbf{Z}_p}$ et $x \in \widehat{\mathcal{W}}_\infty^{c\tilde{\Gamma}_{\bar{R}}\text{-uni}}$, on a $g(f_c(x)) = f_{\chi(g)c}(g(x))$.

Démonstration. — Rappelons que $g\gamma_i = \gamma_i^{\chi(g)}g$ pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$. En outre, on a $g(V_i) = \chi(g)^{-1}V_i$, en particulier, on a $g(P_{\underline{n},c}(\underline{V})) = \chi(g)^{-|\underline{n}|}P_{\underline{n},\chi(g)c}(\underline{V})$. On a

$$\begin{aligned} g(f_c(x)) &= \sum_{\underline{n} \in \mathbf{N}^d} \frac{(-1)^{|\underline{n}|}}{c^{|\underline{n}|}\underline{n}!} g(\underline{\gamma}^{-c} - 1)^{\underline{n}}(x) \otimes g(P_{\underline{n},c}(\underline{V})) \\ &= \sum_{\underline{n} \in \mathbf{N}^d} \frac{(-1)^{|\underline{n}|}}{c^{|\underline{n}|}\underline{n}!} (\underline{\gamma}^{-c\chi(g)} - 1)^{\underline{n}}(g(x)) \otimes \chi(g)^{-|\underline{n}|}P_{\underline{n},\chi(g)c}(\underline{V}) = f_{\chi(g)c}(g(x)). \end{aligned}$$

□

À partir de maintenant, on suppose que $c = p^{m_0}$ est tel que $c\tilde{\Gamma}_R \subseteq \tilde{\Gamma}_R$.

Lemme 4.2.5. — On a $f_c^{-1} \left((\widehat{\mathcal{W}}_\infty[V_1, \dots, V_d])^{\Gamma_R} \right) \subseteq \left(\mathcal{W}_\infty^{c\tilde{\Gamma}_R\text{-uni}} \right)^{\gamma_0^{\mathbf{Z}_p}}$.

Démonstration. — Soit $x \in \widehat{\mathcal{W}}_\infty^{c\tilde{\Gamma}_R\text{-uni}}$ et $f_c(x)$ l'élément de $(\widehat{\mathcal{W}}_\infty[V_1, \dots, V_d])^{c\tilde{\Gamma}_R}$ qu'il définit. Si $g \in \gamma_0^{\mathbf{Z}_p}$, on a $g(f_c(x)) = f_{\chi(g)c}(g(x))$ d'après le lemme 4.2.4 : si $g(f_c(x)) = f_c(x)$, on a $f_{\chi(g)c}(g(x)) = f_c(x)$ et en évaluant en $V_1 = \dots = V_d = 0$, on tire $g(x) = x$: on a donc $f_c^{-1} \left((\widehat{\mathcal{W}}_\infty[V_1, \dots, V_d])^{\Gamma_R} \right) \subseteq \left(\widehat{\mathcal{W}}_\infty^{c\tilde{\Gamma}_R\text{-uni}} \right)^{\gamma_0^{\mathbf{Z}_p}}$. Il s'agit donc de montrer que $\left(\widehat{\mathcal{W}}_\infty^{c\tilde{\Gamma}_R\text{-uni}} \right)^{\gamma_0^{\mathbf{Z}_p}} = \left(\mathcal{W}_\infty^{c\tilde{\Gamma}_R\text{-uni}} \right)^{\gamma_0^{\mathbf{Z}_p}}$.

Rappelons que $\mathcal{W}_\infty = \bigoplus_{j=1}^n R_\infty[p^{-1}]e_j$ et $\widehat{\mathcal{W}}_\infty = \widehat{R}_\infty[p^{-1}] \otimes_{R_\infty[p^{-1}]} \mathcal{W}_\infty$. Soit $x = \sum_{j=1}^n x_j e_j \in \left(\widehat{\mathcal{W}}_\infty^{c\tilde{\Gamma}_R\text{-uni}} \right)^{\gamma_0^{\mathbf{Z}_p}}$. Il existe un entier $N > 0$ tel que $(1 - \gamma_i)^N(x) = 0$ pour $i \in \{1, \dots, d\}$, et $\gamma_0(x) = x$: si \mathcal{N} désigne le sous- $R[p^{-1}]$ -module de $\widehat{R}_\infty[p^{-1}]$ engendré par les éléments $\gamma_1^{cn_1} \dots \gamma_d^{cn_d}(x_j)$ pour $j \in \{1, \dots, n\}$ et $n_i \in \{0, \dots, N-1\}$ (pour $i \in \{1, \dots, d\}$), alors \mathcal{N} est de type fini sur $R[p^{-1}]$ et stable sous l'action de $c\tilde{\Gamma}_R$ et de γ_0 . D'après [2, Propositions 2.7, 3.4, 3.9 et 3.10], on a $\mathcal{N} \subseteq R_\infty[p^{-1}]$, et donc $x \in \mathcal{W}_\infty$, ce qu'on voulait. □

Proposition 4.2.6. — $D_{\text{HT}}(V)$ est fini sur $R[p^{-1}]$.

Démonstration. — Après les réductions, et d'après le lemme 4.2.5, il suffit de montrer que $\left(\mathcal{W}_\infty^{c\tilde{\Gamma}_R\text{-uni}} \right)^{\gamma_0^{\mathbf{Z}_p}}$ est fini sur $R[p^{-1}]$. Soit $x = \sum_{j=1}^n x_j e_j \in \left(\mathcal{W}_\infty^{c\tilde{\Gamma}_R\text{-uni}} \right)^{\gamma_0^{\mathbf{Z}_p}}$ (on a $x_j \in R_\infty[p^{-1}]$ pour $j \in \{1, \dots, n\}$). Il existe $m \in \mathbf{N}$ tel que $m \geq m_0$ et $x_j \in R_m[p^{-1}]$ pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$.

Si $i \in \{1, \dots, d\}$, l'action de γ_i^c sur \mathcal{W}_∞ est décrite dans la base $\mathfrak{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ par une matrice $M_i \in \text{GL}_n(R[p^{-1}])$ (d'après les réductions faites). Écrivons $x_j = \sum_{r=0}^{p^{m-m_0}-1} x_{j,r}^{(i)} (T_i^{(m)})^r$, avec $x_{j,r}^{(i)} \in R_m^{\gamma_i^c}[p^{-1}]$. Notons $X_r^{(i)}$ le vecteur colonne dont le j -ième coefficient est $x_{j,r}^{(i)}$, de sorte que le vecteur colonne dont les coefficients sont les coordonnées de x dans la base \mathfrak{B} est $\sum_{r=0}^{p^{m-m_0}-1} X_r^{(i)} (T_i^{(m)})^r$. Le vecteur colonne dont les coefficients sont les coordonnées de $(1 - \gamma_i^c)(x)$ dans la base \mathfrak{B} est alors $\sum_{r=0}^{p^{m-m_0}-1} (1 - (\varepsilon^{(m)})^{rc} M_i) X_r^{(i)} (T_i^{(m)})^r$. Si $(1 - \gamma_i^c)^N(x) = 0$, on a donc $\sum_{r=0}^{p^{m-m_0}-1} (1 - (\varepsilon^{(m)})^{rc} M_i)^N X_r^{(i)} (T_i^{(m)})^r = 0$, i.e. $(1 - (\varepsilon^{(m)})^{rc} M_i)^N X_r^{(i)} = 0$ pour tout $r \in \{0, \dots, p^{m-m_0} - 1\}$.

Mais la matrice M_i n'a qu'un nombre fini de valeurs propres : il existe $m_i \in \mathbf{N}$ tel que la matrice $1 - (\varepsilon^{(m)})^{rc} M_i$ est inversible (dans $M_n(\text{Frac } R[p^{-1}])$) dès que $v(r) < m - m_i$. Quitte à augmenter m_0 , on peut supposer $m_i \leq m_0$. On a donc $X_r^{(i)} = 0$ dès que $r \neq 0$, i.e. $x_j \in R_m^{\gamma_i^c}[p^{-1}]$.

De même, l'action de γ_0^c est décrite dans la base \mathfrak{B} par une matrice M_0 , et le vecteur colonne dont les coefficients sont les coordonnées de x dans la base \mathfrak{B} est $\sum_{r=0}^{p^{m-m_0}-1} (\varepsilon^{(m)})^r X_r^{(0)}$, où $X_r^{(0)}$ est a coefficients dans $R_m^{c\tilde{\Gamma}_R}[p^{-1}]$. Si $s \in \mathbf{N}$, le vecteur colonne dont les coefficients sont les coordonnées de $\gamma_0^{cp^s}(x)$ dans la base \mathfrak{B} est alors $\sum_{r=0}^{p^{m-m_0}-1} (\varepsilon^{(m)})^{r\chi(\gamma_0)^{cp^s}} M_0^{p^s} X_r^{(0)}$.

On a $m_0 + s + a \geq v(1 - \chi(\gamma_0)^{cp^s}) \geq m_0 + s - b$ (où $a, b \in \mathbf{N}$ sont des constantes ne dépendant que de R , cf. [2, Lemme 3.7], rappelons aussi que $c = p^m$). Soit $r \in \{0, \dots, p^{m-m_0} - 1\}$ tel que $v(r) \leq m - 2m_0 + b$. Posons $s_r = m - 2m_0 - v(r) + b \in \mathbf{N}$. On a alors $v(1 - \chi(\gamma_0)^{cp^{s_r}}) \geq m - m_0 - v(r)$ d'où $r \equiv r\chi(\gamma_0)^{cp^{s_r}} \pmod{p^{m-m_0} \mathbf{Z}_p}$. Comme $\gamma_0^c(x) = x$ et donc $\gamma_0^{cp^{s_r}}(x) = x$, on a alors $(\varepsilon^{(m)})^{r\chi(\gamma_0)^{cp^{s_r}}} M_0^{p^{s_r}} X_r^{(0)} = (\varepsilon^{(m)})^r X_r^{(0)}$. Mais $m - m_0 - v(r) + a + b \geq v(1 - \chi(\gamma_0)^{cp^{s_r}}) \geq m - m_0 - v(r)$: on a $r\chi(\gamma_0)^{cp^{s_r}} - r = up^{m-m_0+\alpha_r}$, avec $0 \leq \alpha_r \leq a + b$ et $u \in \mathbf{Z}_p^\times$. On a donc $(1 - (\varepsilon^{(m_0-\alpha_r)})^u M_0^{p^{s_r}}) X_r^{(0)} = 0$.

Quitte à augmenter m_0 , on peut supposer $m_0 > a + b$, de sorte qu'on a toujours $\varepsilon^{(m_0-\alpha_r)} \neq 1$. Si $X_r \neq 0$, alors M_0 a une valeur propre de la forme $(\varepsilon^{(m_0-\alpha_r+s_r)})^v$ (où $v \in \mathbf{Z}_p^\times$). Comme M_0 n'a qu'un nombre fini de valeurs propres, cela implique qu'il existe $m'_0 \in \mathbf{N}$ (qui ne dépend que de V) tel que $X_r \neq 0 \Rightarrow m_0 - \alpha_r + s_r \leq m'_0$, soit encore $X_r \neq 0 \Rightarrow v(r) \geq m - m_0 - m'_0 - a$ (quitte à augmenter m'_0 , on peut supposer $m'_0 \geq m_0 - (a + b)$, de sorte que $m - m_0 - m'_0 - a \leq m - 2m_0 + b$). Cela implique que les x_j sont fixes par $\gamma_0^{cp^{m'_0+a}}$.

Comme les x_j sont fixes par $\gamma_1^c, \dots, \gamma_d^c$, on a $x_j \in R_{m_0+m'_0+a}[p^{-1}]$ pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$. Ainsi,

$$\left(\mathcal{W}_\infty^{\widetilde{\Gamma}_R\text{-uni}} \right)^{\gamma_0^{c \mathbf{Z}_p}} \subseteq \bigoplus_{i=1}^n R_{m_0+m'_0+a}[p^{-1}] e_j$$

est fini sur $R[p^{-1}]$. \square

Définition 4.2.7. — (cf. Hyodo [37,]) Soit $V \in \mathbf{Rep}_{\mathbf{Q}_p}(\mathcal{G}_R)$. Rappelons que V est de Hodge-Tate lorsque l'homomorphisme naturel

$$\alpha_{\text{HT}}: \mathbf{B}_{\text{HT}} \otimes_{R[p^{-1}]} \mathbf{D}_{\text{HT}}(V) \rightarrow \mathbf{B}_{\text{HT}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$$

(dédit de l'inclusion $\mathbf{D}_{\text{HT}}(V) \subseteq \mathbf{B}_{\text{HT}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$) est un isomorphisme. La sous-catégorie pleine de $\mathbf{Rep}_{\mathbf{Q}_p}(\mathcal{G}_R)$ dont les objets sont les représentations p -adiques de Hodge-Tate est notée $\mathbf{Rep}_{\text{HT}}(\mathcal{G}_R)$.

Si $V \in \mathbf{Rep}_{\text{HT}}(\mathcal{G}_R)$, le $R[p^{-1}]$ -module est projectif de rang $\dim_{\mathbf{Q}_p}(V)$. Cela résulte de ce que $\mathbf{B}_{\text{HT}} \otimes_{R[p^{-1}]} \mathbf{D}_{\text{HT}}(V)$ est libre sur \mathbf{B}_{HT} et de la fidélité platitude de \mathbf{B}_{HT} sur $R[p^{-1}]$ (car \mathbf{B}_{HT} est libre sur C qui est fidèlement plat sur $R[p^{-1}]$ d'après le théorème 3.2.3).

Proposition 4.2.8. — Soit $V \in \mathbf{Rep}_{\text{HT}}(\mathcal{G}_R)$, alors il existe une sous- R -algèbre S de \overline{R} telle que $S[p^{-1}]/R[p^{-1}]$ est finie étale galoisienne et telle que $S[p^{-1}] \otimes_{R[p^{-1}]} \mathbf{D}_{\text{HT}}(V)$ est libre sur $S[p^{-1}]$.

Démonstration. — Posons $D = \mathbf{D}_{\text{HT}}(V)$. Remarquons tout d'abord que si S est une sous- R -algèbre S de \overline{R} telle que $S[p^{-1}]/R[p^{-1}]$ est finie étale galoisienne, on a

$$\begin{aligned} (\mathbf{B}_{\text{HT}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\mathcal{G}_S} &= (\mathbf{B}_{\text{HT}} \otimes_{R[p^{-1}]} \mathbf{D}_{\text{HT}}(V))^{\mathcal{G}_S} \\ &= \mathbf{B}_{\text{HT}}^{\mathcal{G}_S} \otimes_{R[p^{-1}]} \mathbf{D}_{\text{HT}}(V) = S[p^{-1}] \otimes_{R[p^{-1}]} \mathbf{D}_{\text{HT}}(V) \end{aligned}$$

(cf. corollaire 4.1.4). On donc peut faire la deuxième réduction : quitte à remplacer R par une R -algèbre S comme dans l'énoncé, on peut supposer que $\widehat{\mathcal{W}}_\infty = (C \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\mathcal{G}_R}$ est libre de rang n sur $\widehat{R}_\infty[p^{-1}]$. Il existe alors un sous- $R_\infty[p^{-1}]$ -module \mathcal{W}_∞ de $\widehat{\mathcal{W}}_\infty$ stable par Γ_R tel que $C \otimes_{\mathbf{Q}_p} V \simeq C \otimes_{R_\infty[p^{-1}]} \mathcal{W}_\infty$ en tant que \mathcal{G}_R -modules. On a alors (cf. lemme 4.2.5)

$$D \subseteq R_\infty[V_1, \dots, V_d, t, t^{-1}] \otimes_{R_\infty} \mathcal{W}_\infty.$$

Cette inclusion induit un homomorphisme $R_\infty[p^{-1}][t, t^{-1}]$ -linéaire

$$R_\infty[p^{-1}][V_1, \dots, V_d, t, t^{-1}] \otimes_{R[p^{-1}]} D \xrightarrow{\alpha} R_\infty[p^{-1}][V_1, \dots, V_d, t, t^{-1}] \otimes_{R_\infty[p^{-1}]} \mathcal{W}_\infty.$$

Comme $\text{Id}_{\mathbf{B}_{\text{HT}}} \otimes \alpha = \alpha_{\text{HT}}(V)$ est un isomorphisme, il en est de même de α par fidélité platitude de \mathbf{B}_{HT} sur $R_\infty[p^{-1}][V_1, \dots, V_d, t, t^{-1}]$ (car C est fidèlement plat sur $R_\infty[p^{-1}]$ en vertu du théorème 3.2.3). On en déduit que $R_\infty[p^{-1}] \otimes_{R[p^{-1}]} D$ est libre sur $R_\infty[p^{-1}]$ grâce au lemme suivant.

Lemme 4.2.9. — Soient A un anneau et M un A -module tels que $M \otimes_A A[V_1, \dots, V_d, t, t^{-1}]$ est libre de rang fini sur $A[V_1, \dots, V_d, t, t^{-1}]$. Alors M est libre sur A .

Démonstration. — Il suffit de tensoriser l'isomorphisme $M \otimes_A A[V_1, \dots, V_d, t, t^{-1}] \simeq (A[V_1, \dots, V_d, t, t^{-1}])^n$ par A , vu comme $A[V_1, \dots, V_d, t, t^{-1}]$ -algèbre via $V_i \mapsto 0$ et $t \mapsto 1$. \square

Si maintenant e_1, \dots, e_n est une base du $R_\infty[p^{-1}]$ -module $R_\infty[p^{-1}] \otimes_{R[p^{-1}]} D$, il existe un entier m tel que $e_i \in R_m[p^{-1}] \otimes_{R[p^{-1}]} D$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, et il suffit de prendre $S = R_m$. \square

CHAPITRE 5

L'ANNEAU B_{dR}

5.1. Construction

Notons $\mathcal{R}(R) = \varprojlim_{x \mapsto x^p} \overline{R}/p\overline{R}$ la limite projective du système $\overline{R}/p\overline{R} \leftarrow \overline{R}/p\overline{R} \leftarrow \dots$ dans lequel les morphismes de transition sont donnés par le Frobenius. Lorsqu'aucune confusion n'en résulte, on la notera simplement \mathcal{R} . Un élément de \mathcal{R} est une suite (x_0, x_1, \dots) avec $x_n \in \overline{R}/p\overline{R}$ et $x_{n+1}^p = x_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. L'anneau \mathcal{R} est parfait. En effet, le Frobenius de \mathcal{R} envoyant (x_0, x_1, x_2, \dots) sur (x_0^p, x_0, x_1, \dots) , il est injectif, et il est aussi surjectif, car le Frobenius est surjectif sur $\overline{R}/p\overline{R}$ (proposition 2.0.1). En outre, l'homomorphisme $\mathcal{R} \rightarrow \overline{R}/p\overline{R}; x \mapsto x_0$ est surjectif. Notons enfin que l'anneau \mathcal{R} est naturellement muni d'une action de \mathcal{G}_R .

Rappelons que pour tout $x = (x_0, x_1, \dots) \in \mathcal{R}$, il existe une unique suite $(x^{(0)}, x^{(1)}, \dots)$ d'éléments de $\widehat{\overline{R}}$ telle que pour tout $n \in \mathbf{N}$, x_n soit la réduction de $x^{(n)}$ modulo p et $x^{(n)} = (x^{(n+1)})^p$: si \widehat{x}_m désigne un relèvement quelconque de x_m dans $\widehat{\overline{R}}$, la suite de terme général $\widehat{x}_{n+m}^{p^m}$ converge dans $\widehat{\overline{R}}$ quand m tend vers $+\infty$, et sa limite $x^{(n)}$ ne dépend pas des choix des relèvements (cf. [27, II.1.2.2], ce ne sont autres que les représentants multiplicatifs des x_n , cf. [45, II Proposition 8]). Rappelons aussi qu'avec cette écriture, les lois d'anneau de \mathcal{R} sont données par : $(x+y)^{(n)} = \lim_{m \rightarrow \infty} (x^{(n+m)} + y^{(n+m)})^{p^m}$ et $(xy)^{(n)} = x^{(n)}y^{(n)}$ pour $n \in \mathbf{N}$. Dans la suite, nous utiliserons indifféremment les deux écritures.

En particulier, les suites $(\varepsilon^{(0)}, \varepsilon^{(1)}, \varepsilon^{(2)}, \dots)$ et $(T_i^{(0)}, T_i^{(1)}, T_i^{(2)}, \dots)$ pour $i \in \{1, \dots, d\}$ choisies dans la partie 2 définissent des éléments de \mathcal{R} notés respectivement ε et \widetilde{T}_i . Choisissons aussi $\widetilde{p} = (p^{(0)}, p^{(1)}, p^{(2)}, \dots) \in \mathcal{R}$ tel que $p^{(0)} = p$.

L'anneau \mathcal{R} est muni d'une structure de k -algèbre via l'homomorphisme $x \mapsto (x, x^{p^{-1}}, x^{p^{-2}}, \dots)$ (rappelons que k est parfait). On dispose alors (cf. *loc. cit.*) d'une application

$$\begin{aligned} \theta: W(\mathcal{R}) &\longrightarrow \widehat{\overline{R}} \\ (a_0, a_1, a_2, \dots) &\longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} p^n a_n^{(n)}. \end{aligned}$$

Proposition 5.1.1. — *L'application θ est un homomorphisme de $W(k)$ -algèbres.*

Démonstration. — Il suffit de le vérifier modulo p^n pour tout $n \in \mathbf{N}_{>0}$. La réduction θ_n de θ modulo p^n s'insère dans le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} W_n(\mathcal{R}) & \xrightarrow{\theta_n} & \overline{R}/p^n\overline{R} \\ f \downarrow & & \uparrow \phi_n \\ W_n(\overline{R}/p\overline{R}) & \xrightarrow{g} & W_n(\overline{R}/p^n\overline{R}) \end{array}$$

où l'application f est définie par $f(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) = (x_{0,n}, x_{1,n}, \dots, x_{n-1,n})$ (n -ièmes composantes dans $\overline{R}/p\overline{R}$), l'application g par $g(y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) = (y_0^{(0)}, y_1^{(0)}, \dots, y_{n-1}^{(0)}) \pmod{p^n\overline{R}}$ et ϕ_n par $\phi_n(z_0, z_1, \dots, z_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} p^i z_i^{p^{n-i}}$ (c'est la n -ième composante fantôme). En effet, on a $(g \circ f)(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) = (a_0^{(n)}, a_1^{(n)}, \dots, a_{n-1}^{(n)}) \pmod{p^n\overline{R}}$ et donc $(\phi_n \circ g \circ f)(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} p^i (a_i^{(n)})^{p^{n-i}} \pmod{p^n\overline{R}} = \sum_{i=0}^{n-1} p^i a_i^{(i)} \pmod{p^n\overline{R}} = \theta_n(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$. L'application f est un homomorphisme de $W_n(k)$ -algèbres, lorsque $W_n(\overline{R}/p\overline{R})$ est

muni de la structure de $W_n(k)$ -algèbre donnée par $x \mapsto [x^{p^{-n}}]$ (représentant de Teichmüller). L'application ϕ_n est un homomorphisme d'anneaux (par définition de la structure d'anneau sur $W_n(\overline{R}/p^n\overline{R})$). L'application g n'est pas un homomorphisme d'anneaux, mais le composé $\phi_n \circ g$ l'est. Cela résulte du fait que $\phi_n(z_0, z_1, \dots, z_{n-1})$ ne dépend que des restes de z_0, \dots, z_{n-1} modulo $p\overline{R}$. En effet, si $\lambda_i \in \overline{R}$, on a $p^i(z_i + p\lambda_i)^{p^{n-i}} - p^i z_i^{p^{n-i}} = \sum_{j=1}^{p^{n-i}} p^i \binom{p^{n-i}}{j} p^j \lambda_i^j z_i^{p^{n-i}-j} \in p^n \overline{R}$ vu que $v(p^i \binom{p^{n-i}}{j} p^j) = i + (n-i-v(j)) + j \geq n$. \square

L'homomorphisme θ est clairement \mathcal{G}_R -équivariant. Posons $\xi = [\tilde{p}] - p$.

Proposition 5.1.2. — *L'homomorphisme θ est surjectif, et son noyau est l'idéal principal engendré par ξ .*

Démonstration. — Comme $W(\mathcal{R})$ est complet pour la topologie p -adique, la surjectivité se vérifie modulo p . Mais l'application θ modulo p est $\theta_1: \mathcal{R} \rightarrow \overline{R}/p\overline{R}$; $x \mapsto x_0$, qui est surjective comme on l'a vu plus haut.

On a $\theta(\xi) = p^{(0)} - p = 0$. Comme $W(\mathcal{R})$ est séparé et complet pour la topologie p -adique et \widehat{R} sans p -torsion (cf. proposition 2.0.3), pour voir que $\text{Ker}(\theta) = \xi W(\mathcal{R})$, il suffit de montrer que pour tout $x \in \text{Ker}(\theta)$, il existe $z \in W(\mathcal{R})$ tel que $x - \xi z \in pW(\mathcal{R})$. Comme $\theta(x) \equiv x^{(0)} \pmod{p\overline{R}}$, on a $x^{(0)} \in p\overline{R}$. Pour $n \in \mathbf{N}$, écrivons $x_0^{(n)} = \alpha_n + p\beta_n$ avec $\alpha_n \in \overline{R}$ et $\beta_n \in \widehat{R}$. On a $(\alpha_n + p\beta_n)^{p^n} = (x_0^{(n)})^{p^n} = x_0^{(0)} \in p\overline{R}$ d'où $\alpha_n^{p^n} \in \overline{R} \cap p\widehat{R} = p\overline{R}$ (proposition 2.0.3). On a donc $\alpha_n = p^{(n)}\alpha'_n$ avec $\alpha'_n \in \overline{R}$, car $(\alpha'_n)^{p^n} \in \overline{R}$ et $\alpha'_n \in \overline{R}[p^{-1}]$. Si $y^{(n)} = \alpha'_n + (p^{(n)})^{p^n-1}\beta_n$, on a $x_0^{(n)} = p^{(n)}y^{(n)}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Comme $x_0 \in \mathcal{R}$ et \widehat{R} est sans p -torsion, la suite $(y^{(0)}, y^{(1)}, \dots)$ définit un élément $y \in \mathcal{R}$, tel que $x_0 = \tilde{p}y$: on a alors $x - \xi[y] \equiv x - [\tilde{p}y] \pmod{pW(\mathcal{R})}$ et donc $x - \xi[y] \in pW(\mathcal{R})$. \square

L'homomorphisme θ induit un homomorphisme $W(\mathcal{R})[p^{-1}] \rightarrow C$, encore noté θ .

Définition 5.1.3. — On note $B_{\text{dR}}^{\nabla+}(R) = \varprojlim_n W(\mathcal{R})[p^{-1}]/(\text{Ker}(\theta))^n$ le séparé complété de l'anneau $W(\mathcal{R})[p^{-1}]$ pour la topologie $\text{Ker}(\theta)$ -adique.

On obtient ainsi une $W[p^{-1}]$ -algèbre munie d'une action de \mathcal{G}_R . L'homomorphisme θ se prolonge en un homomorphisme $B_{\text{dR}}^{\nabla+}(R) \rightarrow C$, encore noté θ . Remarquons que cette construction est fonctorielle en R , mais que $B_{\text{dR}}^{\nabla+}$ ne dépend que de \overline{R} . Lorsqu'il n'y a pas de risque de confusion, on notera simplement $B_{\text{dR}}^{\nabla+}$.

Dans $B_{\text{dR}}^{\nabla+}$, on dispose de l'élément $t = \log([\varepsilon]) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} ([\varepsilon] - 1)^n$. En effet, la série converge parce que $[\varepsilon] - 1 \in \text{Ker}(\theta)$, et l'action de \mathcal{G}_R sur t est donnée par $g(t) = \chi(g)t$ (parce que $g(\varepsilon) = \varepsilon^{\chi(g)}$).

Proposition 5.1.4. — *On a $\xi B_{\text{dR}}^{\nabla+} = ([\varepsilon] - 1) B_{\text{dR}}^{\nabla+} = \text{Ker}(\theta)$.*

Démonstration. — Par functorialité, on a une application $B_{\text{dR}}^{\nabla+}(\mathbf{Z}_p) \rightarrow B_{\text{dR}}^{\nabla+}(R)$. Mais l'anneau $B_{\text{dR}}^{\nabla+}(\mathbf{Z}_p)$ est l'anneau des entiers du corps des périodes p -adiques associé à \mathbf{Q}_p dans [27, II.1.5]. Il suffit donc de vérifier l'assertion lorsque $R = \mathbf{Z}_p$, cf. loc. cit. [II.1.5.4]. \square

Proposition 5.1.5. — *L'anneau $B_{\text{dR}}^{\nabla+}$ n'a pas de t -torsion.*

Démonstration. — D'après la proposition 5.1.4, il suffit de vérifier que $B_{\text{dR}}^{\nabla+}$ n'a pas de ξ -torsion. Cela résulte du fait que $W(\mathcal{R})[p^{-1}]$ n'a pas de ξ -torsion. En effet, si $x \in W(\mathcal{R})[p^{-1}]$ est non nul, on peut écrire $x = \sum_{n=r}^{\infty} p^n [x_n]$ avec $x_n \in \mathcal{R}$ et $x_r \neq 0$. Si $\xi x = 0$, on a, après division par p^r et réduction modulo p , l'égalité $\tilde{p}x_r = 0$ dans \mathcal{R} . En relevant dans \widehat{R} , on obtient $p^{(n)}x_r^{(n)} = 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ et donc $x_r^{(n)} = 0$ vu que \widehat{R} n'a pas de p -torsion (proposition 2.0.3), soit $x_r = 0$: contradiction. \square

Définition 5.1.6. — On pose $B_{\text{dR}}^{\nabla}(R) = B_{\text{dR}}^{\nabla+}(R)[t^{-1}]$.

C'est une $W[p^{-1}]$ -algèbre munie d'une action de \mathcal{G}_R . Là encore, cette construction est fonctorielle en R , et $B_{\text{dR}}^{\nabla}(R)$ ne dépend que de \overline{R} . Là encore, on notera simplement B_{dR}^{∇} quand il n'y a pas d'ambiguïté. D'après la proposition 5.1.5, $B_{\text{dR}}^{\nabla+}$ est un sous-anneau de B_{dR}^{∇} .

En étendant θ par R -linéarité, on obtient un homomorphisme $\theta_R: R \otimes_W W(\mathcal{R}) \rightarrow \widehat{R}$.

Définition 5.1.7. — (cf. [27, 1.2.2]). Notons $A_{\text{inf}}(\widehat{R}/R)$ le séparé complété de $R \otimes_W W(\mathcal{R})$ pour la topologie définie par l'idéal $\theta_R^{-1}(p\widehat{R})$ (engendré par p et $\text{Ker}(\theta_R)$). On note encore $\theta_R: A_{\text{inf}}(\widehat{R}/R) \rightarrow \widehat{R}$ l'homomorphisme induit.

D'après *loc. cit.*, $A_{\text{inf}}(\widehat{R}/R) \rightarrow \widehat{R}$ (resp. $A_{\text{inf}}(\widehat{R}/R)/(\text{Ker}(\theta_R))^{m+1} \rightarrow \widehat{R}$) est un R -épaississement pro-infinitésimal (resp. infinitésimal d'ordre $\leq m$) formel p -adique universel de \widehat{R} . Cela signifie que $A_{\text{inf}}(\widehat{R}/R) \rightarrow \widehat{R}$ (resp. $A_{\text{inf}}(\widehat{R}/R)/(\text{Ker}(\theta_R))^{m+1} \rightarrow \widehat{R}$) est un objet initial de la catégorie dont les objets sont les homomorphismes de R -algèbres $\theta_A: A \rightarrow \widehat{R}$ tels que A est séparé et complet pour la topologie $(\text{Ker}(\theta_A) + pA)$ -adique (resp. et tels que $\text{Ker}(\theta_A)^{m+1} = 0$), avec les morphismes évidents.

L'homomorphisme $\theta_R: A_{\text{inf}}(\widehat{R}/R) \rightarrow \widehat{R}$ induit un homomorphisme surjectif $\theta_R: A_{\text{inf}}(\widehat{R}/R)[p^{-1}] \rightarrow C$.

Proposition 5.1.8. — *Pour tout $m \in \mathbf{N}$, on a un isomorphisme naturel*

$$A_{\text{inf}}(\widehat{R}/R_0)[p^{-1}]/(\text{Ker}(\theta_{R_0}))^{m+1} \xrightarrow{\sim} A_{\text{inf}}(\widehat{R}/R)[p^{-1}]/(\text{Ker}(\theta_R))^{m+1}.$$

Démonstration. — Comme $A_{\text{inf}}(\widehat{R}/R)/(\text{Ker}(\theta_R))^{m+1} \rightarrow \widehat{R}$ est un R -épaississement, c'est *a fortiori* un R_0 -épaississement : il existe un unique morphisme de R -épaississements infinitésimaux

$$a: A_{\text{inf}}(\widehat{R}/R_0)/(\text{Ker}(\theta_{R_0}))^{m+1} \rightarrow A_{\text{inf}}(\widehat{R}/R)/(\text{Ker}(\theta_R))^{m+1}.$$

Il s'agit de voir que c'est un isomorphisme quand on inverse p .

Notons \mathcal{D}_m le séparé complété de $R \otimes_{R_0} A_{\text{inf}}(\widehat{R}/R_0)/(\text{Ker}(\theta_{R_0}))^{m+1}$ pour la topologie p -adique. L'homomorphisme a se prolonge par R -linéarité en $R \otimes_{R_0} A_{\text{inf}}(\widehat{R}/R_0)/(\text{Ker}(\theta_{R_0}))^{m+1} \rightarrow A_{\text{inf}}(\widehat{R}/R)/(\text{Ker}(\theta_R))^{m+1}$ et donc en $\mathcal{D}_m \rightarrow A_{\text{inf}}(\widehat{R}/R)/(\text{Ker}(\theta_R))^{m+1}$.

Par ailleurs, l'homomorphisme θ_{R_0} induit un homomorphisme R -linéaire surjectif $\mathcal{D}_m \rightarrow \widehat{R}$, ce qui munit $\mathcal{D}_m \rightarrow \widehat{R}$ d'une structure naturelle de R -épaississement infinitésimal d'ordre $\leq m$ formel p -adique universel de \widehat{R} . Par universalité de $A_{\text{inf}}(\widehat{R}/R)/(\text{Ker}(\theta_R))^{m+1} \rightarrow \widehat{R}$, il existe un unique morphisme de R -épaississements infinitésimaux $A_{\text{inf}}(\widehat{R}/R)/(\text{Ker}(\theta_R))^{m+1} \rightarrow \mathcal{D}_m$, ce qui fournit un inverse à l'application (déduite de a) construite plus haut (par unicité).

Comme $R_0[p^{-1}] \rightarrow R[p^{-1}]$ est étale l'homomorphisme de R_0 -algèbres $R[p^{-1}] \rightarrow C$ se relève de façon unique en un homomorphisme $R[p^{-1}] \rightarrow A_{\text{inf}}(\widehat{R}/R_0)[p^{-1}]/(\text{Ker}(\theta_{R_0}))^{m+1}$

$$\begin{array}{ccc} R[p^{-1}] & \xrightarrow{\quad} & C \\ \uparrow & \searrow \text{---} & \uparrow \\ R_0[p^{-1}] & \xrightarrow{\quad} & A_{\text{inf}}(\widehat{R}/R_0)[p^{-1}]/(\text{Ker}(\theta_{R_0}))^{m+1} \end{array}$$

Mais comme R est fini sur R_0 , il existe $\delta_m \in \mathbf{N}$ tel que R s'envoie dans $\frac{1}{p^{\delta_m}} A_{\text{inf}}(\widehat{R}/R_0)/(\text{Ker}(\theta_{R_0}))^{m+1}$. On en déduit une application

$$R \otimes_{R_0} A_{\text{inf}}(\widehat{R}/R_0)/(\text{Ker}(\theta_{R_0}))^{m+1} \rightarrow \frac{1}{p^{\delta_m}} A_{\text{inf}}(\widehat{R}/R_0)/(\text{Ker}(\theta_{R_0}))^{m+1}$$

et donc $\mathcal{D}_m \rightarrow \frac{1}{p^{\delta_m}} A_{\text{inf}}(\widehat{R}/R_0)/(\text{Ker}(\theta_{R_0}))^{m+1}$ vu que le but est séparé et complet pour la topologie p -adique.

En inversant p , on en déduit un homomorphisme $R[p^{-1}]$ -linéaire $\mathcal{D}_m[p^{-1}] \rightarrow A_{\text{inf}}(\widehat{R}/R_0)[p^{-1}]/(\text{Ker}(\theta_{R_0}))^{m+1}$, qui par unicité est inverse de a . \square

Définition 5.1.9. — On note $B_{\text{dR}}^+(R) = \varprojlim_n A_{\text{inf}}(\widehat{R}/R)[p^{-1}]/(\text{Ker}(\theta_R))^n$ le séparé complété de l'anneau $A_{\text{inf}}(\widehat{R}/R)[p^{-1}]$ pour la topologie $\text{Ker}(\theta_R)$ -adique.

On obtient ainsi une $R[p^{-1}]$ -algèbre munie d'une action de \mathcal{G}_R . L'homomorphisme θ_R se prolonge en un homomorphisme $B_{\text{dR}}^+(R) \rightarrow C$, encore noté θ_R . Remarquons que comme le composé $R[p^{-1}] \rightarrow B_{\text{dR}}^+(R) \xrightarrow{\theta_R} C$ est l'inclusion, $R[p^{-1}]$ est un sous-anneau de $B_{\text{dR}}^+(R)$. Par ailleurs, la construction de $B_{\text{dR}}^+(R)$ est fonctorielle en R , et l'homomorphisme $W \rightarrow R$ induit un homomorphisme $B_{\text{dR}}^{\nabla+}(R) \rightarrow B_{\text{dR}}^+(R)$. En particulier, on dispose de l'élément t dans B_{dR}^+ . On verra plus tard (proposition 5.2.2), que l'homomorphisme $B_{\text{dR}}^{\nabla+}(R) \rightarrow B_{\text{dR}}^+(R)$ est injectif.

Définition 5.1.10. — On pose $B_{\text{dR}}(R) = B_{\text{dR}}^+(R)[t^{-1}]$.

C'est une $R[p^{-1}]$ -algèbre munie d'une action de \mathcal{G}_R , fonctorielle en R . D'après la proposition 5.1.8, les applications naturelles $B_{\text{dR}}^+(R_0) \rightarrow B_{\text{dR}}^+(R)$ et $B_{\text{dR}}(R_0) \rightarrow B_{\text{dR}}(R)$ sont des isomorphismes. On verra plus tard (proposition 5.2.2) qu'elle ne dépend que de \overline{R} et de T_1, \dots, T_d : on notera simplement B_{dR} et B_{dR}^+ quand il n'y aura pas d'ambiguïté.

5.2. Filtration de B_{dR}

On munit B_{dR}^{∇} de la filtration donnée par $\text{Fil}^r B_{\text{dR}}^{\nabla} = t^r B_{\text{dR}}^{\nabla+}$ pour $r \in \mathbf{Z}$. C'est une filtration décroissante, séparée (pour $r \geq 0$, c'est la topologie $\text{Ker}(\theta)$ -adique sur $B_{\text{dR}}^{\nabla+}$, cf. proposition 5.1.4) et exhaustive. Par ailleurs, pour tout $r \in \mathbf{Z}$, le sous-module $\text{Fil}^r B_{\text{dR}}^{\nabla}$ est stable par \mathcal{G}_R . Notons $\text{Gr}^{\bullet} B_{\text{dR}}^{\nabla}$ (resp. $\text{Gr}^{\bullet} B_{\text{dR}}^{\nabla+}$) le gradué de B_{dR}^{∇} (resp. de $B_{\text{dR}}^{\nabla+}$) pour cette filtration (resp. la filtration induite).

Proposition 5.2.1. — *On a des isomorphismes de \mathcal{G}_R -modules $\text{Gr}^{\bullet} B_{\text{dR}}^{\nabla+} \simeq C[t]$ et $\text{Gr}^{\bullet} B_{\text{dR}}^{\nabla} \simeq C[t, t^{-1}]$, la graduation étant donnée par le degré (on note encore t son image dans $\text{Gr}^1 B_{\text{dR}}^{\nabla}$).*

Démonstration. — Cela résulte du fait que $B_{\text{dR}}^{\nabla+}$ n'a pas de t -torsion (proposition 5.1.5) et du fait que θ est \mathcal{G}_R -équivariant. \square

Pour $i \in \{1, \dots, d\}$, on a $T_i \otimes 1 - 1 \otimes [\tilde{T}_i] \in \text{Ker}(\theta_R)$ dans $R \otimes_W W(\mathcal{R})$. On note u_i son image dans $A_{\text{inf}}(\widehat{R}/R)$ et dans $B_{\text{dR}}^+(R)$. Comme $B_{\text{dR}}^+(R)$ est séparé et complet pour la topologie $\text{Ker}(\theta)$ -adique, l'homomorphisme $B_{\text{dR}}^{\nabla+} \rightarrow B_{\text{dR}}^+$ s'étend en l'homomorphisme

$$f: B_{\text{dR}}^{\nabla+}[[X_1, \dots, X_d]] \longrightarrow B_{\text{dR}}^+ \\ X_i \longmapsto u_i.$$

Proposition 5.2.2. — *f est un isomorphisme.*

Démonstration. — Commençons par construire un homomorphisme $R[p^{-1}] \rightarrow B_{\text{dR}}^{\nabla+}[[X_1, \dots, X_d]]$ prolongeant l'homomorphisme

$$g: \mathcal{O}_K[T_1, \dots, T_d] \longrightarrow B_{\text{dR}}^{\nabla+}[[X_1, \dots, X_d]] \\ T_i \longmapsto [\tilde{T}_i] + X_i.$$

Posons $\mathcal{B}_{\text{dR}}^{\nabla+} = \varprojlim_n W(\mathcal{R})/(\text{Ker}(\theta))^n$ le séparé complété de $W(\mathcal{R})$ pour la topologie $\text{Ker}(\theta)$ -adique. C'est une

W -algèbre, qui va nous servir de « structure entière » dans $B_{\text{dR}}^{\nabla+}$ (ce n'est autre que $A_{\text{inf}}(\widehat{R}/W)$, cf. [27, 1.2.2]). L'homomorphisme θ s'étend à $\mathcal{B}_{\text{dR}}^{\nabla+}$. Posons aussi $\mathcal{B}_{\text{dR}}^+ = \mathcal{B}_{\text{dR}}^{\nabla+}[[X_1, \dots, X_d]]$. On note encore θ l'homomorphisme $\mathcal{B}_{\text{dR}}^+ \rightarrow \widehat{R}$ qui prolonge $\theta: \mathcal{B}_{\text{dR}}^{\nabla+} \rightarrow \widehat{R}$ tel que $\theta(X_i) = 0$. Bien sûr, l'homomorphisme g se factorise par $\mathcal{B}_{\text{dR}}^+$.

Comme $\text{Ker}(\theta_{\mathcal{B}_{\text{dR}}^{\nabla+}}) = \xi \mathcal{B}_{\text{dR}}^{\nabla+}$ d'après la proposition 5.1.2, on a $\text{Ker}(\theta) = (\xi, X_1, \dots, X_d) \mathcal{B}_{\text{dR}}^+$: pour tout $n \in \mathbf{N}$, homomorphisme naturel $(W(\mathcal{R})[[X_1, \dots, X_d]])/(\xi, X_1, \dots, X_d)^n \rightarrow \mathcal{B}_{\text{dR}}^+ / (\text{Ker}(\theta))^n$ est un isomorphisme. En particulier, $\mathcal{B}_{\text{dR}}^+ / (\text{Ker}(\theta))^n$ est séparé et complet pour la topologie p -adique vu que $W(\mathcal{R})$ est complet et $(\xi, X_1, \dots, X_d)^n$ est un idéal fermé.

Soient $n \in \mathbf{N}_{>0}$ et $g_n: W[T_1, \dots, T_d] \rightarrow \mathcal{B}_{\text{dR}}^+ / (\text{Ker}(\theta))^n$ l'homomorphisme \mathcal{O}_K -linéaire tel que $g_n(T_i) = [\tilde{T}_i] + X_i$ pour $i \in \{1, \dots, d\}$. Comme T_i est inversible dans R et donc dans \overline{R} , il en est de même de \tilde{T}_i dans \mathcal{R} , et $[\tilde{T}_i]$ est inversible dans $\mathcal{B}_{\text{dR}}^{\nabla+}$. Ainsi $g_n(T_i)$ est inversible modulo $\text{Ker}(\theta)$, donc inversible, vu que $\text{Ker}(\theta)$ est nilpotent dans $\mathcal{B}_{\text{dR}}^+ / (\text{Ker}(\theta))^n$. L'homomorphisme g_n induit donc un unique homomorphisme $g_n: \mathcal{O}_K[T_1^{\pm 1}, \dots, T_d^{\pm 1}] \rightarrow \mathcal{B}_{\text{dR}}^+ / (\text{Ker}(\theta))^n$, soit encore un unique homomorphisme $g_n: R^0 \rightarrow \mathcal{B}_{\text{dR}}^+ / (\text{Ker}(\theta))^n$ vu que le but est complet pour la topologie p -adique.

Soit $r \in \mathbf{N}_{>0}$. Notons $g_{n,r}: R^0/p^r R^0 \rightarrow \mathcal{B}_{\text{dR}}^+ / (p^r, (\text{Ker}(\theta))^n)$ la réduction de g_n modulo p^r . On a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} \tilde{R}/p^r \tilde{R} & \longrightarrow & \mathcal{B}_{\text{dR}}^+ / (p, \text{Ker}(\theta)) \\ \uparrow & \searrow^{g_{n,r}} & \uparrow \\ R^0/p^r R^0 & \xrightarrow{g_{n,r}} & \mathcal{B}_{\text{dR}}^+ / (p^r, (\text{Ker}(\theta))^n) \end{array}$$

où la flèche du haut est donnée par $\tilde{R}/p^r \tilde{R} \rightarrow \overline{R}/p^r \overline{R} \simeq \mathcal{B}_{\text{dR}}^+ / (p, \text{Ker}(\theta))$ (en effet, on a $\mathcal{B}_{\text{dR}}^+ / \text{Ker}(\theta) \simeq \widehat{R}$ via θ). Cela résulte du fait que l'idéal $(p, \text{Ker}(\theta))$ est nilpotent dans $\mathcal{B}_{\text{dR}}^+ / (p^r, (\text{Ker}(\theta))^n)$, et de ce que \tilde{R} est obtenu à partir de R^0 en itérant les opérations (ét), (loc) et (comp). Par unicité, les morphismes $(g_{n,r})_{r \in \mathbf{N}_{>0}}$ forment un système projectif. En passant à limite, il existe un unique morphisme $g_n: \tilde{R} \rightarrow \mathcal{B}_{\text{dR}}^+ / (\text{Ker}(\theta))^n$ qui relève $g_n: \mathcal{O}_K[T_1, \dots, T_d] \rightarrow \mathcal{B}_{\text{dR}}^+ / (\text{Ker}(\theta))^n$ (rappelons que $\mathcal{B}_{\text{dR}}^+ / (\text{Ker}(\theta))^n$ est séparé et complet pour la topologie p -adique).

Par unicité encore, les homomorphismes $(g_n)_{n \in \mathbf{N}_{>0}}$ forment un système projectif. En passant à la limite, on en déduit qu'il existe un unique $g: \tilde{R}[p^{-1}] \rightarrow \mathcal{B}_{\text{dR}}^{\nabla+}[[X_1, \dots, X_d]]$ qui prolonge $g: \mathcal{O}_K[T_1, \dots, T_d] \rightarrow \mathcal{B}_{\text{dR}}^{\nabla+}[[X_1, \dots, X_d]]$.

Pour $m \in \mathbf{N}$, on a alors le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} R[p^{-1}] & \xrightarrow{\quad} & C \\ \uparrow & \searrow g & \uparrow \theta \\ \widetilde{R}[p^{-1}] & \xrightarrow{g} & \mathcal{B}_{\text{dR}}^{\nabla+}[p^{-1}][[X_1, \dots, X_d]] / \text{Ker}(\theta)^{m+1}. \end{array}$$

Comme $R[p^{-1}]$ est étale sur $\widetilde{R}[p^{-1}]$ et $\text{Ker}(\theta) \subset \mathcal{B}_{\text{dR}}^{\nabla+}[p^{-1}][[X_1, \dots, X_d]] / \text{Ker}(\theta)$ est nilpotent, il existe un unique homomorphisme $R[p^{-1}] \rightarrow \mathcal{B}_{\text{dR}}^{\nabla+}[p^{-1}][[X_1, \dots, X_d]] / \text{Ker}(\theta)^{m+1}$ encore noté g (en pointillés sur le diagramme) qui prolonge $g: \mathcal{O}_K[T_1, \dots, T_d] \rightarrow \mathcal{B}_{\text{dR}}^{\nabla+}[p^{-1}][[X_1, \dots, X_d]] / \text{Ker}(\theta)^{m+1}$. Comme R est fini sur \widetilde{R} , il existe $d_m \in \mathbf{N}$ tel que g envoie R dans $p^{-d_m} \mathcal{B}_{\text{dR}}^{\nabla+}[p^{-1}][[X_1, \dots, X_d]] / \text{Ker}(\theta)^{m+1}$. Comme ce dernier est complet pour la topologie $\theta^{-1}(p\widehat{\widetilde{R}})$ -adique, g induit (par $W(\mathcal{R})$ -linéarité) une application $g: A_{\text{inf}}(\widehat{\widetilde{R}}/R) \rightarrow p^{-d_m} \mathcal{B}_{\text{dR}}^{\nabla+}[p^{-1}][[X_1, \dots, X_d]] / \text{Ker}(\theta)^{m+1}$ et donc un unique homomorphisme $g: A_{\text{inf}}(\widehat{\widetilde{R}}/R)[p^{-1}] / \text{Ker}(\theta)^{m+1} \rightarrow \mathcal{B}_{\text{dR}}^{\nabla+}[p^{-1}][[X_1, \dots, X_d]] / \text{Ker}(\theta)^{m+1}$. En passant à la limite projective, et en observant que $B_{\text{dR}}^+(R) = \varprojlim_m A_{\text{inf}}(\widehat{\widetilde{R}}/R)[p^{-1}] / \text{Ker}(\theta)^{m+1}$ et $B_{\text{dR}}^{\nabla+} = \varprojlim_m \mathcal{B}_{\text{dR}}^{\nabla+}[p^{-1}] / \text{Ker}(\theta)^{m+1}$, on en déduit un unique homomorphisme

$$g: B_{\text{dR}}^+(R) \rightarrow B_{\text{dR}}^{\nabla+}[[X_1, \dots, X_d]].$$

Par unicité de $g: R[p^{-1}] \rightarrow \mathcal{B}_{\text{dR}}^{\nabla+}[[X_1, \dots, X_d]]$, le composé $B_{\text{dR}}^+(R) \xrightarrow{g} B_{\text{dR}}^{\nabla+}[[X_1, \dots, X_d]] \xrightarrow{f} B_{\text{dR}}^+(R)$ coïncide avec l'identité sur $R[p^{-1}] \subset B_{\text{dR}}^+(R)$. Comme il coïncide aussi avec l'identité sur l'image de $W(\mathcal{R})$ (par $W(\mathcal{R})$ -linéarité), on a $g \circ f = \text{Id}_{B_{\text{dR}}^+(R)}$. De même, le composé $f \circ g$ coïncide avec l'identité sur $\mathcal{O}_K[T_1, \dots, T_d]$ (car g relève $g: \mathcal{O}_K[T_1, \dots, T_d] \rightarrow \mathcal{B}_{\text{dR}}^{\nabla+}[[X_1, \dots, X_d]]$) et sur $W(\mathcal{R})$ (par $W(\mathcal{R})$ -linéarité encore), c'est l'identité, et f est bien un isomorphisme. \square

La proposition précédente permet d'identifier $B_{\text{dR}}^{\nabla+}$ à un sous-anneau de $B_{\text{dR}}^+(R)$. On a alors

$$B_{\text{dR}}^+(R) = B_{\text{dR}}^{\nabla+}[[u_1, \dots, u_d]].$$

On en déduit aussi que $B_{\text{dR}}^+(R)$ n'a pas de t -torsion, et donc que $B_{\text{dR}}^+(R)$ est un sous-anneau de $B_{\text{dR}}(R)$. En outre, les anneaux $B_{\text{dR}}^+(R)$ et $B_{\text{dR}}(R)$ ne dépendent en fait que de \overline{R} et des T_i . Quand cela ne prête pas à confusion, on les notera donc simplement B_{dR}^+ et B_{dR} .

Proposition 5.2.3. — *Les anneaux B_{dR}^+ et B_{dR} sont des $\overline{R}[p^{-1}]$ -algèbres, de façon \mathcal{G}_R -équivariante, et de sorte que la restriction de θ à $\overline{R}[p^{-1}]$ est l'inclusion dans C .*

Démonstration. — Cela résulte du fait que l'anneau $\overline{R}[p^{-1}]$ est réunion de $R[p^{-1}]$ -algèbres étales, du fait que B_{dR}^+ est séparé et complet pour la topologie $\text{Ker}(\theta_R)$ -adique et du diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} \overline{R}[p^{-1}] & \xrightarrow{\quad} & C \\ \uparrow & \searrow & \uparrow \theta \\ R[p^{-1}] & \xrightarrow{\quad} & B_{\text{dR}}^+. \end{array}$$

L'équivariance provient de l'unicité de la structure de $\overline{R}[p^{-1}]$ -algèbre. \square

Remarquons que le composé $\overline{R}[p^{-1}] \rightarrow B_{\text{dR}}^+ \xrightarrow{\theta} C$ étant l'inclusion, $\overline{R}[p^{-1}]$ est même un sous-anneau de B_{dR}^+ . Par contre, il n'y a pas de section équivariante à θ_R , i.e. les anneaux B_{dR}^+ et B_{dR} ne sont pas des C -algèbres.

Notons R^{nr} la réunion des sous- R -algèbres finies étales de \overline{R} (i.e. de E_R , cf. l'introduction), et \widehat{R}^{nr} le séparé complété de R^{nr} pour la topologie p -adique. C'est une sous- R -algèbre de $\widehat{\overline{R}}$ munie d'une action de \mathcal{G}_R . Comme $H^0(\mathcal{G}_R, C) = R[p^{-1}]$ (proposition 3.1.8), on a $H^0(\mathcal{G}_R, \widehat{R}^{\text{nr}}[p^{-1}]) = R[p^{-1}]$

Proposition 5.2.4. — *La structure de $R^{\text{nr}}[p^{-1}]$ -algèbre de B_{dR}^+ et de B_{dR} se prolonge de façon unique en une structure (\mathcal{G}_R -équivariante) de $\widehat{R}^{\text{nr}}[p^{-1}]$ -algèbre.*

Démonstration. — Reprenons les notations de la preuve de la proposition 5.2.2 : on dispose d'un morphisme de R -algèbres $B_{\text{dR}}^+ \rightarrow B_{\text{dR}}^+$, où $B_{\text{dR}}^+ = \mathcal{B}_{\text{dR}}^{\nabla+}[[u_1, \dots, u_d]]$ avec $\mathcal{B}_{\text{dR}}^{\nabla+} = \varprojlim_n W(\mathcal{R}) / (\text{Ker}(\theta))^n$. Elle est munie de

l'homomorphisme $\theta: B_{\text{dR}}^+ \rightarrow \widehat{\overline{R}}$. Soit S une R -algèbre finie étale contenue dans \overline{R} . L'idéal $\text{Ker}(\theta)$ étant nilpotent dans $\mathcal{B}_{\text{dR}}^{\nabla+} / (\text{Ker}(\theta))^n$ et S étale sur R , l'homomorphisme de R -algèbres $S \rightarrow \widehat{\overline{R}} = \mathcal{B}_{\text{dR}}^+ / \text{Ker}(\theta)$ se relève de façon unique en un homomorphisme de R -algèbres $S \rightarrow \mathcal{B}_{\text{dR}}^+ / (\text{Ker}(\theta))^n$. Par unicité, on en déduit un homomorphisme \mathcal{G}_R -équivariant $R^{\text{nr}} \rightarrow \mathcal{B}_{\text{dR}}^+ / (\text{Ker}(\theta))^n$. L'anneau $\mathcal{B}_{\text{dR}}^+ / (\text{Ker}(\theta))^n$ est filtré par les puissances de $\text{Ker}(\theta)$, et le

gradu e associ e est $\bigoplus_{|\underline{n}| < n} \widehat{R} \xi^{n_0} u_1^{n_1} \cdots u_d^{n_d}$: il est s epar e et complet pour la topologie p -adique. L'homomorphisme

se prolonge donc de façon unique en $\widehat{R}^{\text{nr}} \rightarrow \mathcal{B}_{\text{dR}}^+ / (\text{Ker}(\theta))^n$. Par unité, on obtient ainsi un système compatible, et en passant à la limite, on obtient un homomorphisme $\widehat{R}^{\text{nr}} \rightarrow \mathcal{B}_{\text{dR}}^+$. Ainsi, on a un homomorphisme \mathcal{G}_R -équivariant $\widehat{R}^{\text{nr}}[p^{-1}] \rightarrow \mathcal{B}_{\text{dR}}^+$. Le compos e $\widehat{R}^{\text{nr}}[p^{-1}] \rightarrow \mathcal{B}_{\text{dR}}^+ \xrightarrow{\theta} C$ étant l'inclusion, $\widehat{R}^{\text{nr}}[p^{-1}]$ est un sous-anneau de $\mathcal{B}_{\text{dR}}^+$ et de \mathcal{B}_{dR} . \square

Munissons $\mathcal{B}_{\text{dR}}^+$ de la filtration donn e par $\text{Fil}^r \mathcal{B}_{\text{dR}}^+ = (\text{Ker}(\theta))^r$ pour $r \in \mathbf{N}$. C'est une filtration décroissante s epar e et exhaustive. Elle est stable par l'action de \mathcal{G}_R (car θ est équivariant).

Rappelons qu'on a $\mathcal{B}_{\text{dR}}^+ = \mathcal{B}_{\text{dR}}^{\nabla+} \llbracket u_1, \dots, u_d \rrbracket$, d'où $\text{Ker}(\theta) = (t, u_1, \dots, u_d) \mathcal{B}_{\text{dR}}^+$ (cf. propositions 5.1.4 et 5.2.2). Pour $n \in \mathbf{N}$, on a alors $t^{-n} \text{Fil}^n \mathcal{B}_{\text{dR}}^+ = (\frac{u_1}{t}, \dots, \frac{u_d}{t}) \mathcal{B}_{\text{dR}}^+$. Posons alors

$$\text{Fil}^0 \mathcal{B}_{\text{dR}} = \sum_{n=0}^{\infty} t^{-n} \text{Fil}^n \mathcal{B}_{\text{dR}}^+ = \mathcal{B}_{\text{dR}}^+ \left[\frac{u_1}{t}, \dots, \frac{u_d}{t} \right]$$

et $\text{Fil}^r \mathcal{B}_{\text{dR}} = t^r \text{Fil}^0 \mathcal{B}_{\text{dR}}$ pour $r \in \mathbf{Z}$. On obtient ainsi une filtration décroissante de \mathcal{B}_{dR} , stable par \mathcal{G}_R . Notons $\text{Gr}^\bullet \mathcal{B}_{\text{dR}}^+$ et $\text{Gr}^\bullet \mathcal{B}_{\text{dR}}$ le gradu e de $\mathcal{B}_{\text{dR}}^+$ et de \mathcal{B}_{dR} respectivement.

Proposition 5.2.5. — *On a $\text{Gr}^\bullet \mathcal{B}_{\text{dR}}^+ \simeq C[t, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_d]$, la graduation étant donn e par le degré, où \bar{u}_i désigne l'image de u_i dans $\text{Gr}^1 \mathcal{B}_{\text{dR}}^+$.*

Démonstration. — D'après la proposition 5.2.2, on a $\mathcal{B}_{\text{dR}}^+ = \mathcal{B}_{\text{dR}}^{\nabla+} \llbracket u_1, \dots, u_d \rrbracket$ et donc $\text{Ker}(\theta) = (t, u_1, \dots, u_d) \mathcal{B}_{\text{dR}}^+$. On a donc $\text{Gr}^\bullet \mathcal{B}_{\text{dR}}^+ = (\text{Gr}^\bullet \mathcal{B}_{\text{dR}}^{\nabla+})[\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_d]$ où \bar{u}_i désigne l'image de u_i dans $\text{Gr}^1 \mathcal{B}_{\text{dR}}^+$. Comme $\text{Gr}^\bullet \mathcal{B}_{\text{dR}}^{\nabla+} \simeq C[t]$ (proposition 5.2.1), on a bien $\text{Gr}^\bullet \mathcal{B}_{\text{dR}}^+ \simeq C[t, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_d]$. \square

Proposition 5.2.6. — *On a $\text{Gr}^0 \mathcal{B}_{\text{dR}} \simeq C[v_1, \dots, v_d]$, où v_i désigne l'image de $\frac{u_i}{t}$ dans $\text{Gr}^0 \mathcal{B}_{\text{dR}}$. En particulier, $\text{Gr}^\bullet \mathcal{B}_{\text{dR}} \simeq C[v_1, \dots, v_d, t, t^{-1}]$, la graduation étant donn e par le degré en t .*

Démonstration. — Comme $\text{Fil}^0 \mathcal{B}_{\text{dR}} = \mathcal{B}_{\text{dR}}^+ \left[\frac{u_1}{t}, \dots, \frac{u_d}{t} \right]$ on a $\text{Gr}^0 \mathcal{B}_{\text{dR}} = \mathcal{B}_{\text{dR}}^+ \left[\frac{u_1}{t}, \dots, \frac{u_d}{t} \right] / t \mathcal{B}_{\text{dR}}^+ \left[\frac{u_1}{t}, \dots, \frac{u_d}{t} \right]$. Pour $i \in \{1, \dots, d\}$, on a $u_i = t \cdot \frac{u_i}{t} = 0$ dans $\text{Gr}^0 \mathcal{B}_{\text{dR}}$. On a donc $\text{Gr}^0 \mathcal{B}_{\text{dR}} \simeq (\mathcal{B}_{\text{dR}}^{\nabla+} / t \mathcal{B}_{\text{dR}}^{\nabla+})[v_1, \dots, v_d]$ où v_i désigne l'image de $\frac{u_i}{t}$, i.e. $\text{Gr}^0 \mathcal{B}_{\text{dR}} \simeq C[v_1, \dots, v_d]$. Pour $r \in \mathbf{Z}$, on a donc $\text{Gr}^r \mathcal{B}_{\text{dR}} \simeq t^r C[v_1, \dots, v_d]$ car $\mathcal{B}_{\text{dR}}^+$ et donc $\text{Fil}^0 \mathcal{B}_{\text{dR}}$ sont sans t -torsion. \square

Corollaire 5.2.7. — *On a un isomorphisme $\mathcal{B}_{\text{HT}}^0 \xrightarrow{\sim} \text{Gr}^0 \mathcal{B}_{\text{dR}}$ de \mathcal{G}_R -modules, indépendant des choix faits pour les \tilde{T}_i (où $\mathcal{B}_{\text{HT}}^0$ est l'anneau de Hyodo servant à définir \mathcal{B}_{HT} et la notion de représentation de Hodge-Tate, cf. partie 4).*

Démonstration. — Rappelons qu'on a un isomorphisme \mathcal{G}_R -équivariant de C -algèbres

$$f: C[V_1, \dots, V_d] \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}_{\text{HT}}^0$$

envoyant $V_1^{n_1} \cdots V_d^{n_d}$ sur l'image dans $\mathcal{B}_{\text{HT}}^0$ de $\left[(t^{-1} \text{d log } (\tilde{T}_1))^{\otimes n_1} \otimes \cdots \otimes (t^{-1} \text{d log } (\tilde{T}_d))^{\otimes n_d} \right] \in \mathcal{B}_{\text{HT}, \underline{n}}^0$ pour $\underline{n} = (n_1, \dots, n_d) \in \mathbf{N}^d$, et où $C[V_1, \dots, V_d]$ est muni de l'action semi-linéaire de \mathcal{G}_R définie par $g(V_i) = \chi(g)^{-1} (V_i + c_i(g))$ (cf. section 4). Considérons l'homomorphisme C -linéaire $h: C[V_1, \dots, V_d] \rightarrow \text{Gr}^0 \mathcal{B}_{\text{dR}}$ défini par

$$h(V_i) = -\frac{v_i}{T_i}$$

où $\text{Gr}^0 \mathcal{B}_{\text{dR}}$ est identifié à $C[v_1, \dots, v_d]$ en vertu de la proposition 5.2.6. C'est un isomorphisme ; vérifions qu'il est \mathcal{G}_R - quivariant. Par définition, v_i est l'image de $t^{-1} u_i$ dans $\text{Gr}^0 \mathcal{B}_{\text{dR}}$: si $g \in \mathcal{G}_R$, $g(v_i)$ est l'image de $g(t)^{-1} (T_i \otimes 1 - 1 \otimes g([\tilde{T}_i])) = \chi(g)^{-1} t^{-1} (T_i \otimes 1 - 1 \otimes [\varepsilon]^{c_i(g)} [\tilde{T}_i])$. Comme $[\varepsilon] = \exp(t)$, on a $[\varepsilon]^{c_i(g)} \equiv 1 + c_i(g)t \pmod{t^2 \mathcal{B}_{\text{dR}}^+}$, on a donc $\chi(g)^{-1} t^{-1} (T_i \otimes 1 - 1 \otimes [\varepsilon]^{c_i(g)} [\tilde{T}_i]) \equiv \chi(g)^{-1} t^{-1} (T_i \otimes 1 - 1 \otimes [\tilde{T}_i]) - c_i(g) [\tilde{T}_i] \pmod{t \mathcal{B}_{\text{dR}}^+}$. Comme $[\tilde{T}_i] \equiv T_i \pmod{\text{Ker}(\theta)}$, on a $g(v_i) = \chi(g)^{-1} (v_i - c_i(g) T_i)$ dans $\text{Gr}^0 \mathcal{B}_{\text{dR}}$. On a bien $g(h(V_i)) = g(-T_i^{-1} v_i) = \chi(g)^{-1} (-T_i^{-1} v_i + c_i(g)) = h(g(V_i))$.

Le composé $h \circ f^{-1}$ fournit donc un isomorphisme de \mathcal{G}_R -modules $\mathcal{B}_{\text{HT}}^0 \xrightarrow{\sim} \text{Gr}^0 \mathcal{B}_{\text{dR}}$. Montrons qu'il est indépendant des choix des \tilde{T}_i . Un autre choix est de la forme $\varepsilon^{\alpha_i} \tilde{T}_i$, avec $\alpha_i \in \mathbf{Z}_p$. Notons v'_i l'image de $t^{-1} (T_i \otimes 1 - 1 \otimes [\varepsilon^{\alpha_i} \tilde{T}_i])$ dans $\text{Gr}^0 \mathcal{B}_{\text{dR}}$. On a $v'_i = v_i - T_i \alpha_i$. Comme $t^{-1} \text{d log } (\varepsilon^{\alpha_i} \tilde{T}_i) = \alpha_i + t^{-1} \text{d log } (\tilde{T}_i)$ (rappelons que $t^{-1} \text{d log } (\varepsilon)$ s'identifie à 1 dans $\mathcal{B}_{\text{HT}}^0$), on a $(h \circ f^{-1})(t^{-1} \text{d log } (\varepsilon^{\alpha_i} \tilde{T}_i)) = \alpha_i - T_i^{-1} v_i = -T_i^{-1} v'_i$. \square

Proposition 5.2.8. — *La filtration $\text{Fil}^\bullet \mathcal{B}_{\text{dR}}^+$ est la filtration induite par la filtration $\text{Fil}^\bullet \mathcal{B}_{\text{dR}}$ sur $\mathcal{B}_{\text{dR}}^+ \subset \mathcal{B}_{\text{dR}}$.*

Démonstration. — Il s'agit de montrer que pour tout $r \in \mathbf{N}$, on a $B_{\text{dR}}^+ \cap \text{Fil}^r B_{\text{dR}} = \text{Fil}^r B_{\text{dR}}^+$. On a bien sûr $t^{-r} \text{Fil}^r B_{\text{dR}}^+ \subseteq \text{Fil}^0 B_{\text{dR}}$, donc $\text{Fil}^r B_{\text{dR}}^+ \subseteq B_{\text{dR}}^+ \cap t^r \text{Fil}^0 B_{\text{dR}}$. Montrons l'inclusion réciproque par récurrence sur r , le cas $r = 0$ étant trivial vu que $\text{Fil}^0 B_{\text{dR}}^+ = B_{\text{dR}}^+ \subseteq \text{Fil}^0 B_{\text{dR}}$.

Supposons qu'on a $(*)_r$ $B_{\text{dR}}^+ \cap \text{Fil}^r(B_{\text{dR}}) \subseteq \text{Fil}^r B_{\text{dR}}^+$, et montrons que $(*)_{r+1}$ $B_{\text{dR}}^+ \cap \text{Fil}^{r+1} B_{\text{dR}} \subseteq \text{Fil}^{r+1} B_{\text{dR}}^+$. Compte tenu de l'égalité $(*)_r$, l'inclusion $\text{Fil}^{r+1} B_{\text{dR}}^+ \subseteq B_{\text{dR}}^+ \cap \text{Fil}^{r+1} B_{\text{dR}}$ donne lieu à un homomorphisme surjectif

$$\lambda_r : \text{Gr}^r B_{\text{dR}}^+ \rightarrow (B_{\text{dR}}^+ \cap \text{Fil}^r B_{\text{dR}}) / (B_{\text{dR}}^+ \cap \text{Fil}^{r+1} B_{\text{dR}}).$$

Par ailleurs, le composé $B_{\text{dR}}^+ \cap \text{Fil}^r B_{\text{dR}} \rightarrow \text{Fil}^r B_{\text{dR}} \rightarrow \text{Gr}^r B_{\text{dR}}$ se factorise par la projection $B_{\text{dR}}^+ \cap \text{Fil}^r B_{\text{dR}} \rightarrow (B_{\text{dR}}^+ \cap \text{Fil}^r B_{\text{dR}}) / (B_{\text{dR}}^+ \cap \text{Fil}^{r+1} B_{\text{dR}})$ en un homomorphisme (injectif)

$$\mu_r : (B_{\text{dR}}^+ \cap \text{Fil}^r B_{\text{dR}}) / (B_{\text{dR}}^+ \cap \text{Fil}^{r+1} B_{\text{dR}}) \rightarrow \text{Gr}^r B_{\text{dR}}.$$

Rappelons (propositions 5.2.5 et 5.2.6) que $\text{Gr}^r B_{\text{dR}}^+ \simeq \text{Sym}_C^r \left(Ct \oplus \bigoplus_{i=1}^d C\bar{u}_i \right)$ (où \bar{u}_i désigne l'image de u_i dans $\text{Gr}^1 B_{\text{dR}}^+$), et $\text{Gr}^r B_{\text{dR}} \simeq t^r C[v_1, \dots, v_d]$ (où v_i désigne l'image de $\frac{u_i}{t}$ dans $\text{Gr}^0 B_{\text{dR}}$). Le composé

$$\text{Gr}^r B_{\text{dR}}^+ \xrightarrow{\lambda_r} (B_{\text{dR}}^+ \cap \text{Fil}^r B_{\text{dR}}) / (B_{\text{dR}}^+ \cap \text{Fil}^{r+1} B_{\text{dR}}) \xrightarrow{\mu_r} \text{Gr}^r B_{\text{dR}}$$

s'identifie alors à l'homomorphisme C -linéaire

$$\begin{aligned} \text{Sym}_C^r \left(Ct \oplus \bigoplus_{i=1}^d C\bar{u}_i \right) &\longrightarrow t^r C[v_1, \dots, v_d] \\ t^{r_0} \bar{u}_1^{r_1} \dots \bar{u}_d^{r_d} &\longmapsto t^r v_1^{r_1} \dots v_d^{r_d} \end{aligned}$$

(pour $\underline{r} = (r_0, \dots, r_d) \in \mathbf{N}^{d+1}$ tel que $|\underline{r}| = r_0 + r_1 + \dots + r_d = r$). Ce dernier est injectif : λ_r est un isomorphisme et on a bien $(*)_{r+1}$. \square

Corollaire 5.2.9. — *La filtration $\text{Fil}^\bullet B_{\text{dR}}$ est séparée et exhaustive.*

Démonstration. — L'exhaustivité vient du fait que pour tout $r \in \mathbf{Z}$, on a $t^r B_{\text{dR}}^+ \subseteq \text{Fil}^r B_{\text{dR}}$. Soit $x \in \bigcap_{r \in \mathbf{Z}} \text{Fil}^r B_{\text{dR}}$. On peut écrire $x = t^s y$ avec $s \in \mathbf{Z}$ et $y \in B_{\text{dR}}^+$. On a alors $y \in B_{\text{dR}}^+ \cap \bigcap_{r \in \mathbf{Z}} \text{Fil}^r B_{\text{dR}} = \bigcap_{r \in \mathbf{Z}} \text{Fil}^r B_{\text{dR}}^+$ d'après la proposition 5.2.8. Comme la filtration de B_{dR}^+ est séparée, on a $y = 0$ i.e. $x = 0$. \square

Corollaire 5.2.10. — *Les éléments de $\overline{R}[p^{-1}] \setminus \{0\} \subset B_{\text{dR}}$ (cf. proposition 5.2.3) ne sont pas diviseurs de zéro.*

Démonstration. — Cela résulte du fait que c'est le cas du gradué $\text{Gr}^\bullet B_{\text{dR}}$ (cf. proposition 5.2.6) et de la séparation de la filtration. \square

Corollaire 5.2.11. — *La filtration $\text{Fil}^\bullet B_{\text{dR}}^\nabla$ est la filtration induite par $\text{Fil}^\bullet B_{\text{dR}}$ sur B_{dR}^∇ .*

On munit B_{dR}^+ de la topologie faible (pour laquelle les gradués $\text{Gr}^r B_{\text{dR}}$ sont munis de la topologie p -adique (et pas de la topologie discrète), et B_{dR} de la topologie de la limite inductive. Dans ce qui suit, on calcule la cohomologie galoisienne *continue* de B_{dR} .

Proposition 5.2.12. — *On a*

$$H^q(\mathcal{G}_R, B_{\text{dR}}) = \begin{cases} R[p^{-1}] & \text{si } q = 0, 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. — Pour tout $r \in \mathbf{Z}$, on a la suite exacte de \mathcal{G}_R -modules

$$0 \rightarrow \text{Fil}^{r+1} B_{\text{dR}} \rightarrow \text{Fil}^r B_{\text{dR}} \rightarrow \text{Gr}^r B_{\text{dR}} \rightarrow 0.$$

Elle induit la suite exacte longue

$$\dots \rightarrow H^{q-1}(\mathcal{G}_R, \text{Gr}^r B_{\text{dR}}) \rightarrow H^q(\mathcal{G}_R, \text{Fil}^{r+1} B_{\text{dR}}) \rightarrow H^q(\mathcal{G}_R, \text{Fil}^r B_{\text{dR}}) \rightarrow H^q(\mathcal{G}_R, \text{Gr}^r B_{\text{dR}}) \rightarrow \dots$$

en cohomologie. D'après le corollaire 5.2.7, on a un isomorphisme de \mathcal{G}_R -modules $B_{\text{HT}}^0 \xrightarrow{\sim} \text{Gr}^0 B_{\text{dR}}$, et donc $B_{\text{HT}}^0(r) \xrightarrow{\sim} \text{Gr}^r B_{\text{dR}}$ pour tout $r \in \mathbf{Z}$. D'après la proposition 4.1.3, on a donc

$$H^q(\mathcal{G}_R, \text{Gr}^r B_{\text{dR}}) = \begin{cases} R[p^{-1}] & \text{si } r = 0 \text{ et } q = 0, 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour $r \neq 0$ et $q \in \mathbf{N}$, on a donc $H^q(\mathcal{G}_R, \text{Fil}^{r+1} B_{\text{dR}}) \xrightarrow{\sim} H^q(\mathcal{G}_R, \text{Fil}^r B_{\text{dR}})$, d'où

$$\begin{cases} H^q(\mathcal{G}_R, \text{Fil}^1 B_{\text{dR}}) = \{0\} & \text{(la filtration } \text{Fil}^\bullet B_{\text{dR}} \text{ est séparée d'après le corollaire 5.2.9)} \\ H^q(\mathcal{G}_R, \text{Fil}^0 B_{\text{dR}}) \xrightarrow{\sim} H^q(\mathcal{G}_R, B_{\text{dR}}). \end{cases}$$

On en déduit $H^q(\mathcal{G}_R, \text{Fil}^0 B_{\text{dR}}) \xrightarrow{\sim} H^q(\mathcal{G}_R, \text{Gr}^0 B_{\text{dR}})$ et donc le résultat. \square

5.3. Connexion de B_{dR}

Rappelons (cf. proposition 5.2.2) qu'on a $B_{\text{dR}}^+ = B_{\text{dR}}^{\nabla+}[[u_1, \dots, u_d]]$. Pour $i \in \{1, \dots, d\}$, on note N_i l'unique $B_{\text{dR}}^{\nabla+}$ -dérivation de B_{dR}^+ continue pour la topologie $\text{Ker}(\theta)$ -adique telle que

$$N_i(u_j) = \delta_{i,j} T_i$$

(où $\delta_{i,j}$ désigne le symbole de Kronecker). La dérivation N_i s'étend à B_{dR} car $N_i(t) = 0$. Rappelons (cf. proposition 2.0.2) que le module des différentielles continues $\widehat{\Omega}_R^1[p^{-1}]$ est un $R[p^{-1}]$ -module libre de rang d , admettant la famille $(d \log(T_i))_{1 \leq i \leq d}$ pour base. On définit une connexion

$$\nabla: B_{\text{dR}} \rightarrow B_{\text{dR}} \otimes_{R[p^{-1}]} \widehat{\Omega}_R^1[p^{-1}]$$

en posant

$$\nabla(x) = \sum_{i=1}^d N_i(x) \otimes d \log(T_i)$$

pour $x \in B_{\text{dR}}$. On obtient ainsi une connexion intégrable (car les N_i commutent deux à deux).

Proposition 5.3.1. — *La connexion ∇ commute à l'action de \mathcal{G}_R .*

Démonstration. — Soient $g \in \mathcal{G}_R$ et $x \in B_{\text{dR}}$. On a $g(\nabla(x)) = \sum_{i=1}^d g(N_i(x)) \otimes d \log(T_i)$. Il suffit donc de vérifier que $g(N_i(x)) = N_i(g(x))$ pour $i \in \{1, \dots, d\}$. Par $B_{\text{dR}}^{\nabla+}[[u_1, \dots, \widehat{u}_i, \dots, u_d]]$ -linéarité, il suffit de le vérifier pour $x = u_i^n$, et donc pour $x = u_i$. Rappelons que u_i est l'image de $T_i \otimes 1 - 1 \otimes [\widetilde{T}_i]$ dans B_{dR}^+ : $g(u_i)$ est donc l'image de $T_i \otimes 1 - 1 \otimes [\varepsilon]^{c_i(g)}[\widetilde{T}_i]$, où $c_i(g) \in \mathbf{Z}_p$. On a $g(u_i) - u_i \in B_{\text{dR}}^{\nabla+}$ et donc $N_i(g(u_i)) = N_i(u_i) = T_i = g(N_i(u_i))$. \square

Proposition 5.3.2. — *La connexion ∇ induit la différentielle canonique $d: R[p^{-1}] \rightarrow \widehat{\Omega}_R^1[p^{-1}]$ sur $R[p^{-1}]$.*

Démonstration. — Soit $x \in R[p^{-1}]$. D'après la proposition 5.3.1, on a $g(\nabla(x)) = \nabla(g(x)) = \nabla(x)$ pour tout $g \in \mathcal{G}_R$. On a donc $\nabla(x) \in \widehat{\Omega}_R^1[p^{-1}] \subset B_{\text{dR}} \otimes_{R[p^{-1}]} \widehat{\Omega}_R^1[p^{-1}]$ d'après la proposition 5.2.12. L'assertion résulte alors de ce que $\nabla(T_i) = dT_i$. \square

Proposition 5.3.3. — *On a $(B_{\text{dR}}^+)^{\nabla=0} = B_{\text{dR}}^{\nabla+}$ et $B_{\text{dR}}^{\nabla=0} = B_{\text{dR}}^{\nabla}$.*

Démonstration. — C'est évident pour $B_{\text{dR}}^+ = B_{\text{dR}}^{\nabla+}[[u_1, \dots, u_d]]$. La deuxième assertion résulte de la première en inversant t , sachant que ce dernier est horizontal. \square

Remarque 5.3.4. — La proposition précédente justifie *a posteriori* la notation adoptée pour $B_{\text{dR}}^{\nabla+}$ et B_{dR}^{∇} .

Corollaire 5.3.5. — *On a $B_{\text{dR}}^+ \cap B_{\text{dR}}^{\nabla} = B_{\text{dR}}^{\nabla+}$.*

La dérivation canonique $d: R[p^{-1}] \rightarrow \widehat{\Omega}_R^1[p^{-1}]$ se prolonge en $d: \text{Frac}(R) \rightarrow \text{Frac}(R) \otimes_{R[p^{-1}]} \widehat{\Omega}_R^1[p^{-1}]$.

Proposition 5.3.6. — *On a $\text{Ker}(d: \text{Frac}(R) \rightarrow \text{Frac}(R) \otimes_{R[p^{-1}]} \widehat{\Omega}_R^1[p^{-1}]) = K$ (rappelons que K est algébriquement clos dans $R[p^{-1}]$).*

Démonstration. — Commençons par montrer que $\text{Ker}(d: \text{Frac}(R_0) \rightarrow \text{Frac}(R_0) \otimes_{R_0[p^{-1}]} \widehat{\Omega}_{R_0}^1[p^{-1}]) = W[p^{-1}]$. On a bien sûr $dx = 0$ pour $x \in W[p^{-1}]$. Soit $\widehat{R_{0(p)}}$ le séparé complété, pour la topologie p -adique, du localisé de R_0 en l'idéal premier pR_0 . C'est un anneau de valuation discrète complet, admettant p pour uniformisante, de corps résiduel $\text{Frac}(R_0 \otimes_W k)$. Comme R_0 est séparé pour la topologie p -adique, l'homomorphisme naturel $\text{Frac}(R_0) \rightarrow \widehat{R_{0(p)}}[p^{-1}]$ est injectif. Il suffit donc de montrer que $\text{Ker}(d: \widehat{R_{0(p)}}[p^{-1}] \rightarrow \widehat{R_{0(p)}}[p^{-1}] \otimes_{R_0[p^{-1}]} \widehat{\Omega}_{R_0}^1[p^{-1}]) = W[p^{-1}]$, ce qui résulte de [10, lemme 2.2.9].

Passons au cas général. On a bien sûr $dx = 0$ pour $x \in K$. Réciproquement, soit $x \in \text{Frac}(R)$ tel que $dx = 0$. Comme R est fini sur R_0 , l'élément x est algébrique sur $\text{Frac}(R_0)$: soit $x^n + \sum_{j=1}^n \alpha_j x^{n-j} = 0$ (avec $\alpha_j \in \text{Frac}(R_0)$ pour $j \in \{1, \dots, n\}$) une relation de dépendance de degré minimal. Pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$, on a $\sum_{j=1}^n N_i(\alpha_j) x^{n-j} = 0$, et donc $N_i(\alpha_j) = 0$ pour $j \in \{1, \dots, n\}$ par minimalité de n . On a donc $\alpha_j \in (\text{Frac}(R_0))^{\nabla=0} = W[p^{-1}]$ d'après ce qui précède. L'élément $x \in \text{Frac}(R)$ est donc algébrique sur $W[p^{-1}]$. En particulier, il est entier sur $R[p^{-1}]$ qui est normal : on a $x \in R[p^{-1}]$, d'où $x \in K$. \square

Corollaire 5.3.7. — On a $H^0(\mathcal{G}_R, B_{\text{dR}}^\nabla) = K$.

Démonstration. — On a $B_{\text{dR}}^\nabla = (B_{\text{dR}})^\nabla=0$ d'après la proposition 5.3.3. Comme ∇ commute à l'action de \mathcal{G}_R (proposition 5.3.1), on a $H^0(\mathcal{G}_R, B_{\text{dR}}^\nabla) = H^0(\mathcal{G}_R, B_{\text{dR}})^\nabla=0 = (R[p^{-1}])^\nabla=0 = K$ d'après la proposition 5.3.6. \square

Proposition 5.3.8. — L'application $u_{\text{dR}}: R[p^{-1}] \otimes_K B_{\text{dR}}^\nabla \rightarrow B_{\text{dR}}$ est injective.

Démonstration. — Supposons u_{dR} non injective. Soit $x = \sum_{j=1}^r \lambda_j \otimes b_j$, où $\lambda_j \in R[p^{-1}]$ et $b_j \in B_{\text{dR}}^\nabla$ avec $r \geq 1$ minimal pour les propriétés $x \neq 0$ et $u_{\text{dR}}(x) = 0$. En particulier, on a $\lambda_j \neq 0$ et $b_j \neq 0$ pour $j \in \{1, \dots, r\}$.

On a $\sum_{j=1}^r \lambda_j b_j = 0$ donc $N_i \left(\sum_{j=1}^r \lambda_j b_j \right) = \sum_{j=1}^r N_i(\lambda_j) b_j = 0$ pour $i \in \{1, \dots, d\}$. On a donc $N_i(\lambda_1) \sum_{j=1}^r \lambda_j b_j = \lambda_1 \sum_{j=1}^r N_i(\lambda_j) b_j = 0$ pour $i \in \{1, \dots, d\}$, d'où

$$\sum_{j=2}^r (N_i(\lambda_1) \lambda_j - \lambda_1 N_i(\lambda_j)) b_j = 0$$

pour $i \in \{1, \dots, d\}$. Par minimalité de r et le fait que $b_j \neq 0$ pour $j \in \{2, \dots, r\}$, on a donc $N_i(\lambda_1) \lambda_j - \lambda_1 N_i(\lambda_j) = 0$ et donc $N_i(\lambda_1^{-1} \lambda_j) = 0$ pour $i \in \{1, \dots, d\}$ et $j \in \{2, \dots, r\}$. On a donc $\lambda_1^{-1} \lambda_j \in K$ pour $j \in \{1, \dots, r\}$ d'après la proposition 5.3.6. On a alors $x = \lambda_1 \otimes \left(\sum_{j=1}^r \lambda_1^{-1} \lambda_j b_j \right) = 0$ ce qui est absurde : u_{dR} est donc injective. \square

Proposition 5.3.9. — La connexion $\nabla: B_{\text{dR}} \rightarrow B_{\text{dR}} \otimes_{R[p^{-1}]} \widehat{\Omega}_R^1[p^{-1}]$ a la propriété de Griffith pour la filtration $\text{Fil}^\bullet B_{\text{dR}}$.

Démonstration. — Il s'agit de vérifier que pour tout $r \in \mathbf{Z}$, on a $\nabla(\text{Fil}^r B_{\text{dR}}) \subseteq \text{Fil}^{r-1} B_{\text{dR}} \otimes_{R[p^{-1}]} \widehat{\Omega}_R^1[p^{-1}]$ i.e. que pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$, on a $N_i(\text{Fil}^r B_{\text{dR}}) \subseteq \text{Fil}^{r-1} B_{\text{dR}}$. Comme $\text{Fil}^r B_{\text{dR}} = t^r \text{Fil}^0 B_{\text{dR}}$ et t est horizontal, il suffit de vérifier que $N_i(\text{Fil}^0 B_{\text{dR}}) \subseteq \text{Fil}^{-1} B_{\text{dR}}$.

Rappelons que $\text{Fil}^0 B_{\text{dR}} = B_{\text{dR}}^+ \left[\frac{u_1}{t}, \dots, \frac{u_d}{t} \right]$. On a déjà $N_i(B_{\text{dR}}^+) \subseteq B_{\text{dR}}^+$, et $N_i(u_j) = 0$ pour $j \neq i$. Comme u_i est l'image de $T_i \otimes 1 - 1 \otimes [\widetilde{T}_i]$ dans B_{dR}^+ , on a $N_i(u_i) = T_i = u_i + [\widetilde{T}_i]$ et donc $N_i\left(\frac{u_i}{t}\right) = \frac{u_i}{t} + \frac{[\widetilde{T}_i]}{t} \in \text{Fil}^{-1} B_{\text{dR}}$. \square

5.4. Platitude

Théorème 5.4.1. — Les $R[p^{-1}]$ -algèbres B_{dR}^+ et B_{dR} sont fidèlement plates.

Démonstration. — Pour tout $i \in \mathbf{N}$, le C -module $\text{Gr}^i B_{\text{dR}}^+$ est libre, donc fidèlement plat sur $R[p^{-1}]$ d'après le théorème 3.2.3. Posons $B_i = B_{\text{dR}}^+ / \text{Fil}^{i+1} B_{\text{dR}}^+$. On a $B_{\text{dR}}^+ = \varprojlim_{i \geq 0} B_i$. Comme B_i est extension successive des

$R[p^{-1}]$ -modules $\text{Gr}^j B_{\text{dR}}^+$ pour $j \in \{0, \dots, i\}$, il est plat sur $R[p^{-1}]$.

Soit M un $R[p^{-1}]$ -module de type fini. Montrons que l'application $R[p^{-1}]$ -linéaire naturelle

$$f_M: B_{\text{dR}}^+ \otimes_{R[p^{-1}]} M \rightarrow \varprojlim_{i > 0} (B_i \otimes_{R[p^{-1}]} M)$$

est un isomorphisme. Soit $0 \rightarrow N \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow 0$ une suite exacte de $R[p^{-1}]$ -modules avec L libre de rang fini. Comme $R[p^{-1}]$ est noethérien, le $R[p^{-1}]$ -module N est de type fini. Si $i \in \mathbf{N}$, on a la suite exacte $0 \rightarrow B_i \otimes_{R[p^{-1}]} N \rightarrow B_i \otimes_{R[p^{-1}]} L \rightarrow B_i \otimes_{R[p^{-1}]} M \rightarrow 0$ car B_i est plat sur $R[p^{-1}]$. Comme les applications de transition $B_{i+1} \rightarrow B_i$ sont surjectives, il en est de même des applications $B_{i+1} \otimes_{R[p^{-1}]} N \rightarrow B_i \otimes_{R[p^{-1}]} N$. Le système projectif $\{B_i \otimes_{R[p^{-1}]} N\}_{i \in \mathbf{N}}$ vérifie donc la propriété de Mittag-Leffler. La suite

$$0 \rightarrow \varprojlim_{i > 0} (B_i \otimes_{R[p^{-1}]} N) \rightarrow \varprojlim_{i > 0} (B_i \otimes_{R[p^{-1}]} L) \rightarrow \varprojlim_{i > 0} (B_i \otimes_{R[p^{-1}]} M) \rightarrow 0$$

est donc exacte. On a donc le diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccc} B_{\text{dR}}^+ \otimes_{R[p^{-1}]} N & \longrightarrow & B_{\text{dR}}^+ \otimes_{R[p^{-1}]} L & \longrightarrow & B_{\text{dR}}^+ \otimes_{R[p^{-1}]} M & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow f_N & & \downarrow f_L & & \downarrow f_M & & \\ 0 \longrightarrow \varprojlim_{i > 0} (B_i \otimes_{R[p^{-1}]} N) & \longrightarrow & \varprojlim_{i > 0} (B_i \otimes_{R[p^{-1}]} L) & \longrightarrow & \varprojlim_{i > 0} (B_i \otimes_{R[p^{-1}]} M) & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Comme L est un $R[p^{-1}]$ -module libre, f_L est un isomorphisme. On en déduit que f_M est surjective. Comme c'est vrai pour tout module de type fini M , l'homomorphisme f_N est aussi surjectif. Le lemme du serpent implique alors que $\text{Ker}(f_M) = 0$ i.e. que f_M est un isomorphisme.

Soit maintenant I un idéal de $R[p^{-1}]$. Si $i \in \mathbf{N}$, l'application naturelle $B_i \otimes_{R[p^{-1}]} I \rightarrow B_i$ est injective (B_i est plat sur $R[p^{-1}]$). L'homomorphisme $\varinjlim_{i>0} (B_i \otimes_{R[p^{-1}]} I) \rightarrow \varinjlim_{i>0} B_i = B_{\text{dR}}^+$ est donc injectif. En le composant avec l'isomorphisme $f_I: B_{\text{dR}}^+ \otimes_{R[p^{-1}]} I \rightarrow \varinjlim_{i>0} (B_i \otimes_{R[p^{-1}]} I)$ (comme $R[p^{-1}]$ est noethérien, I est de type fini), on en déduit que l'application naturelle $B_{\text{dR}}^+ \otimes_{R[p^{-1}]} I \rightarrow B_{\text{dR}}^+$ est injective. Comme c'est vrai pour tout idéal I de $R[p^{-1}]$, le $R[p^{-1}]$ -module B_{dR}^+ est plat. Si M est un $R[p^{-1}]$ -module tel que $B_{\text{dR}}^+ \otimes_{R[p^{-1}]} M = 0$, alors $C \otimes_{R[p^{-1}]} M = 0$ vu que $\theta: B_{\text{dR}}^+ \rightarrow C$ est surjectif. Comme C est fidèlement plat sur $R[p^{-1}]$ (théorème 3.2.3), on a $M = 0$ et donc B_{dR}^+ est fidèlement plat sur $R[p^{-1}]$.

Montrons qu'il en est de même pour $B_{\text{dR}} = B_{\text{dR}}^+[t^{-1}]$. Par localisation, on sait déjà que B_{dR} est plat sur $R[p^{-1}]$. Soit M un $R[p^{-1}]$ -module non nul. Il s'agit de montrer que $B_{\text{dR}} \otimes_{R[p^{-1}]} M$ est non nul. Comme $B_{\text{dR}} \otimes_{R[p^{-1}]} M = (B_{\text{dR}}^+ \otimes_{R[p^{-1}]} M)[t^{-1}]$, et $B_{\text{dR}}^+ \otimes_{R[p^{-1}]} M \neq 0$ par fidèle platitude de B_{dR}^+ sur $R[p^{-1}]$, il suffit de montrer que t n'est pas diviseur de zéro dans $B_{\text{dR}}^+ \otimes_{R[p^{-1}]} M$. Soit $0 \rightarrow N \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow 0$ une suite exacte de $R[p^{-1}]$ -modules avec L libre. On a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
& & & & 0 & \xrightarrow{\quad} & N' & \xrightarrow{\quad} & 0 \\
& & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \xrightarrow{\quad} & B_{\text{dR}}^+ \otimes_{R[p^{-1}]} N & \xrightarrow{\quad} & B_{\text{dR}}^+ \otimes_{R[p^{-1}]} L & \xrightarrow{\quad} & B_{\text{dR}}^+ \otimes_{R[p^{-1}]} M & \xrightarrow{\quad} & 0 \\
& & \downarrow t & & \downarrow t & & \downarrow t & & \\
0 & \xrightarrow{\quad} & B_{\text{dR}}^+ \otimes_{R[p^{-1}]} N & \xrightarrow{\quad} & B_{\text{dR}}^+ \otimes_{R[p^{-1}]} L & \xrightarrow{\quad} & B_{\text{dR}}^+ \otimes_{R[p^{-1}]} M & \xrightarrow{\quad} & 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
& & (B_{\text{dR}}^+ / t B_{\text{dR}}^+) \otimes_{R[p^{-1}]} N & \xrightarrow{\quad} & (B_{\text{dR}}^+ / t B_{\text{dR}}^+) \otimes_{R[p^{-1}]} L & & & &
\end{array}$$

la deuxième colonne étant exacte car L est libre sur $R[p^{-1}]$ et B_{dR}^+ sans t -torsion. Le lemme du serpent implique qu'on a la suite exacte $0 \rightarrow N' \rightarrow (B_{\text{dR}}^+ / t B_{\text{dR}}^+) \otimes_{R[p^{-1}]} N \rightarrow (B_{\text{dR}}^+ / t B_{\text{dR}}^+) \otimes_{R[p^{-1}]} L$ avec $N' = \text{Ker}(t: B_{\text{dR}}^+ \otimes_{R[p^{-1}]} M \rightarrow B_{\text{dR}}^+ \otimes_{R[p^{-1}]} M)$. Comme C est plat sur $R[p^{-1}]$ (théorème 3.2.3), il en est de même de $B_{\text{dR}}^+ / t B_{\text{dR}}^+ \simeq C[[u_1, \dots, u_d]]$ d'où $N' = 0$, ce qu'on voulait. \square

CHAPITRE 6

L'ANNEAU B_{cris}

6.1. Construction

Rappelons qu'on a fixé un relèvement $\sigma: R_0 \rightarrow R_0$ du Frobenius (élévation à la puissance p) de $R_0/pR_0 \simeq \tilde{R}/\varpi\tilde{R}$. Le sous-anneau W est stable par σ . En outre, on dispose du Frobenius sur $W(\mathcal{R})$, qu'on note φ .

Notation. On note $W(\mathcal{R})^{\text{DP}}$ l'enveloppe à puissances divisées (compatibles avec les puissances divisées canoniques sur l'idéal $pW(\mathcal{R})$) de $W(\mathcal{R})$ relativement à l'idéal $\text{Ker}(\theta)$.

Par functorialité, l'action de \mathcal{G}_R sur $W(\mathcal{R})$ s'étend à $W(\mathcal{R})^{\text{DP}}$. De même, l'homomorphisme θ s'étend en $\theta: W(\mathcal{R})^{\text{DP}} \rightarrow \widehat{\tilde{R}}$ (les puissances divisées des éléments de $\text{Ker}(\theta)$ s'envoient sur 0). L'idéal $\theta^{-1}(p\widehat{\tilde{R}})$ a des puissances divisées, parce que l'idéal engendré par p a des puissances divisées compatibles à celles de $W(\mathcal{R})^{\text{DP}}$. En particulier, comme $\varphi(x) \equiv x^p \pmod{pW(\mathcal{R})}$ pour $x \in W(\mathcal{R})$, l'endomorphisme φ de $W(\mathcal{R})$ s'étend à $W(\mathcal{R})^{\text{DP}}$.

Définition 6.1.1. — On note $A_{\text{cris}}^\nabla(R)$ le séparé complété de $W(\mathcal{R})^{\text{DP}}$ pour la topologie p -adique.

C'est une W -algèbre munie d'une action de \mathcal{G}_R . L'anneau $A_{\text{cris}}^\nabla(R)$ est fonctoriel en R , mais il ne dépend que de \tilde{R} . Lorsqu'il n'y a pas de risque de confusion, on note simplement A_{cris}^∇ . L'homomorphisme θ s'étend en $\theta: A_{\text{cris}}^\nabla \rightarrow \widehat{\tilde{R}}$. Son noyau (resp. $\theta^{-1}(p\widehat{\tilde{R}})$) est l'adhérence du noyau de θ sur $W(\mathcal{R})^{\text{DP}}$ resp. de $\theta^{-1}(p\widehat{\tilde{R}}) \subset W(\mathcal{R})^{\text{DP}}$. Ce sont encore des idéaux à puissances divisées. Enfin, le Frobenius φ se prolonge à A_{cris}^∇ (car il est continu vu que $\varphi(p) = p$).

Proposition 6.1.2. — On a un isomorphisme

$$W(\mathcal{R})[\delta_0, \delta_1, \dots]/(p\delta_0 - \xi^p, p\delta_{m+1} - \delta_m^p)_{m \in \mathbf{N}_{>0}} \xrightarrow{\sim} W(\mathcal{R})^{\text{DP}}$$

où δ_m s'envoie sur $\gamma^{m+1}(\xi)$ (où $\gamma: x \mapsto \frac{x^p}{p}$).

Démonstration. — Dans une $\mathbf{Z}_{(p)}$ -algèbre, pour rajouter les puissances divisées d'un idéal, il suffit de rajouter les images par les itérés de l'application $\gamma: x \mapsto \frac{x^p}{p}$ d'une famille de générateurs de l'idéal. En effet, si $m \in \mathbf{N}$ et si $m = \sum_{j=0}^r p^j m_j$ est l'écriture de m en base p , on a $\alpha_m y^{[m]} = \gamma^r(y)^{m_r} \gamma^{r-1}(y)^{m_{r-1}} \dots \gamma(y)^{m_1} y^{m_0}$ avec $\alpha_m = m! p^{-m_r(1+p+\dots+p^{r-1}) - m_{r-1}(1+p+\dots+p^{r-2}) - \dots - m_1}$ (car $\gamma^r(y) = p^{-(1+p+\dots+p^{r-1})} y^{p^r}$). On a $v(\alpha_m) = v(m!) - m_r(1+p+\dots+p^{r-1}) - m_{r-1}(1+p+\dots+p^{r-2}) - \dots - m_1 = \lfloor \frac{m}{p} \rfloor + \lfloor \frac{m}{p^2} \rfloor + \dots + \lfloor \frac{m}{p^r} \rfloor - (p^{r-1}m_r + p^{r-2}m_{r-1} + \dots + m_1) - (p^{r-2}m_r + \dots + m_2) - \dots - m_r = 0$. On a donc $\alpha_m \in \mathbf{Z} \setminus p\mathbf{Z} \subseteq \mathbf{Z}_{(p)}^\times$. La proposition résulte donc du fait que $\text{Ker}(\theta)$ est un idéal principal (proposition 5.1.2), ce qui fait que l'anneau $W(\mathcal{R})[\delta_0, \delta_1, \dots]/(p\delta_0 - \xi^p, p\delta_{m+1} - \delta_m^p)_{m \in \mathbf{N}_{>0}}$ a bien la propriété universelle de l'enveloppe à puissances divisées. \square

Corollaire 6.1.3. — Pour tout entier $n \geq 1$, on a un isomorphisme

$$W_n(\mathcal{R})[\delta_0, \delta_1, \dots]/(p\delta_0 - \xi^p, p\delta_{m+1} - \delta_m^p)_{m \in \mathbf{N}_{>0}} \xrightarrow{\sim} A_{\text{cris}}^\nabla / p^n A_{\text{cris}}^\nabla$$

où δ_m s'envoie sur l'image de $\gamma^{m+1}(\xi)$. En particulier, on a un isomorphisme

$$(\mathcal{R}/\tilde{p}^p \mathcal{R})[\delta_0, \delta_1, \dots]/(\delta_m^p)_{m \in \mathbf{N}} \xrightarrow{\sim} A_{\text{cris}}^\nabla / p A_{\text{cris}}^\nabla.$$

Proposition 6.1.4. — L'anneau A_{cris}^∇ n'a pas de p -torsion.

Démonstration. — Comme A_{cris}^{∇} est le séparé complété de $W(\mathcal{R})^{\text{DP}}$ pour la topologie p -adique, il suffit de vérifier que $W(\mathcal{R})^{\text{DP}}$ n'a pas de p -torsion. D'après la proposition 6.1.2, $W(\mathcal{R})^{\text{DP}}$ est isomorphe au quotient de l'anneau de polynômes $W(\mathcal{R})[X_0, X_1, \dots]$ par l'idéal \mathcal{I} engendré par $(pX_0 - \xi^p, pX_{n+1} - X_n^p)_{n \geq 1}$. Soit $\alpha \in W(\mathcal{R})[X_0, X_1, \dots]$ tel que $p\alpha \in \mathcal{I}$. Il s'agit de montrer que $\alpha \in \mathcal{I}$. Il existe un entier N et $\alpha_0, \dots, \alpha_N \in W(\mathcal{R})[X_0, X_1, \dots]$ tels que

$$p\alpha = \alpha_0(pX_0 - \xi^p) + \sum_{n=1}^N \alpha_n(pX_n - X_{n-1}^p).$$

Montrons par récurrence sur N que $\alpha \in \mathcal{I}$.

Si $N = 0$, on a $p\alpha = \alpha_0(pX_0 - \xi^p)$ et donc $\xi^p \alpha_0 = p(\alpha_0 X_0 - \alpha)$. On a donc $\alpha_0 \in pW(\mathcal{R})[X_0, X_1, \dots]$. En effet, si $\xi\lambda = p\mu$ dans $W(\mathcal{R})$, alors $\theta(p\mu) = 0$ d'où $\theta(\mu) = 0$ (rappelons que \widehat{R} est sans p -torsion d'après la proposition 2.0.3) et donc $\mu \in \xi W(\mathcal{R})$ d'après la proposition 5.1.2, soit encore $\lambda \in pW(\mathcal{R})$, car $W(\mathcal{R})$ n'a pas de ξ -torsion (cf. preuve de la proposition 5.1.5). On a donc $p\alpha = \alpha_0(pX_0 - \xi^p) \in p\mathcal{I}$ soit $\alpha \in \mathcal{I}$ (comme l'anneau \mathcal{R} est parfait, $W(\mathcal{R})$ est sans p -torsion).

Supposons maintenant $N > 0$. Pour $n \in \{0, \dots, N-1\}$, on a $\alpha_n = \beta_n + \gamma_n(pX_n - X_{n-1}^p)$ avec $\deg_{X_{N-1}}(\beta_n) < p$ (division euclidienne du polynôme α_n par le polynôme $pX_n - X_{n-1}^p$ (unitaire en X_{N-1})). On a alors

$$p\alpha = \beta_0(pX_0 - \xi^p) + \sum_{n=1}^N \beta_n(pX_n - X_{n-1}^p)$$

avec $\beta_N = \alpha_N + \gamma_0(pX_0 - \xi^p) + \sum_{n=1}^{N-1} \gamma_n(pX_n - X_{n-1}^p)$. En particulier, on a

$$p\alpha \equiv -\beta_0 \xi^p - \sum_{n=1}^N \beta_n X_{n-1}^p \pmod{pW(\mathcal{R})[X_0, X_1, \dots]}.$$

Si $\Lambda = W(\mathcal{R})[X_0, X_1, \dots, X_{N-2}, X_N, X_{N+1}, \dots]$ et $\beta = -\beta_0 \xi^p - \sum_{n=1}^{N-1} \beta_n X_{n-1}^p \in \Lambda[X_{N-1}]$, on a $\deg_{X_{N-1}}(\beta) < p$ et $p\alpha \equiv \beta - \beta_N X_{N-1}^p \pmod{p\Lambda[X_{N-1}]}$. Comme Λ est sans p -torsion, on a $\beta_N = p\beta'_N \in p\Lambda[X_{N-1}]$. Ainsi, on a $p(\alpha - \beta'_N(pX_n - X_{n-1}^p)) = \beta_0(pX_0 - \xi^p) + \sum_{n=1}^{N-1} \beta_n(pX_n - X_{n-1}^p)$, et l'hypothèse de récurrence montre que $\alpha - \beta'_N(pX_n - X_{n-1}^p) \in \mathcal{I}$ et donc $\alpha \in \mathcal{I}$, ce qu'on voulait. \square

Rappelons que $t = \log([\varepsilon]) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} ([\varepsilon] - 1)^n$ dans $B_{\text{dR}}^{\nabla+}$. Comme $[\varepsilon] - 1 \in \text{Ker}(\theta)$, il a des puissances divisées dans $W(\mathcal{R})^{\text{DP}}$. On peut écrire $t = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (n-1)! ([\varepsilon] - 1)^{[n]}$: la série définissant t converge dans A_{cris}^{∇} . Rappelons que l'action de \mathcal{G}_R sur t est donnée par $g(t) = \chi(g)t$. L'action de φ sur t est donnée par $\varphi(t) = pt$ (parce que $\varphi([\varepsilon]) = [\varepsilon]^p$).

Définition 6.1.5. — On pose $B_{\text{cris}}^{\nabla+}(R) = A_{\text{cris}}^{\nabla}(R)[p^{-1}]$ et $B_{\text{cris}}^{\nabla}(R) = B_{\text{cris}}^{\nabla+}(R)[t^{-1}]$.

Ce sont des $W[p^{-1}]$ -algèbres munies d'une action de \mathcal{G}_R et d'un Frobenius φ . Là encore la construction est fonctorielle en R , et on notera simplement $B_{\text{cris}}^{\nabla+}$ et B_{cris}^{∇} quand il n'y a pas d'ambiguïté. D'après la proposition 6.1.4, l'homomorphisme $A_{\text{cris}}^{\nabla} \rightarrow B_{\text{cris}}^{\nabla+}$ est injectif, et on verra plus tard (corollaire 6.2.3), que $B_{\text{cris}}^{\nabla+} \rightarrow B_{\text{cris}}^{\nabla}$ l'est aussi.

Remarque 6.1.6. — Comme $t \in \text{Ker}(\theta)$ et $\text{Ker}(\theta)$ est un idéal à puissances divisées dans A_{cris}^{∇} , on a $t^p \in pA_{\text{cris}}^{\nabla}$. En fait, on a $t^{p-1} \in pA_{\text{cris}}^{\nabla}(\mathbf{Z}_p)$ d'après [27, 2.3.4].

Notation. On note $W(\mathcal{R})_{R_0}^{\text{DP}}$ l'enveloppe à puissances divisées (compatibles avec les puissances divisées canoniques sur l'idéal $p(R_0 \otimes_W W(\mathcal{R}))$) de $R_0 \otimes_W W(\mathcal{R})$ relativement à l'idéal $\text{Ker}(\theta_{R_0})$.

C'est une R_0 -algèbre. Par functorialité, l'action de \mathcal{G}_R sur $R_0 \otimes_W W(\mathcal{R})$ s'étend à $W(\mathcal{R})_{R_0}^{\text{DP}}$. Comme précédemment, l'homomorphisme θ_{R_0} s'étend en $\theta_{R_0} : W(\mathcal{R})_{R_0}^{\text{DP}} \rightarrow \widehat{R}$, et l'idéal $\theta_{R_0}^{-1}(p\widehat{R})$ a des puissances divisées. On munit $R_0 \otimes_W W(\mathcal{R})$ du Frobenius $\sigma \otimes \varphi$ (où le σ de gauche désigne le relèvement du Frobenius à R_0 qu'on s'est donné). Comme $(\sigma \otimes \varphi)(x) \equiv x^p \pmod{p(R_0 \otimes_W W(\mathcal{R}))}$ pour $x \in R_0 \otimes_W W(\mathcal{R})$, il s'étend en un endomorphisme σ -linéaire de $W(\mathcal{R})_{R_0}^{\text{DP}}$, noté φ (cela signifie que $\varphi(\lambda x) = \sigma(\lambda)\varphi(x)$ pour $\lambda \in R_0$ et $x \in W(\mathcal{R})_{R_0}^{\text{DP}}$).

Définition 6.1.7. — On note $A_{\text{cris}}(R_0)$ le séparé complété de $W(\mathcal{R})_{R_0}^{\text{DP}}$ pour la topologie p -adique.

C'est une R_0 -algèbre munie d'une action de \mathcal{G}_R . L'anneau $A_{\text{cris}}(R_0)$ est fonctoriel en R_0 . Lorsqu'il n'y a pas de risque de confusion, on note simplement A_{cris} . Là encore, l'homomorphisme θ_{R_0} s'étend en $\theta_{R_0}: A_{\text{cris}} \rightarrow \widehat{R}$, et son noyau (resp. $\theta_{R_0}^{-1}(p\widehat{R})$) est l'adhérence du noyau de θ_{R_0} sur $W(\mathcal{R})_{R_0}^{\text{DP}}$ (resp. de $\theta^{-1}(p\widehat{R}) \subset W(\mathcal{R})_{R_0}^{\text{DP}}$) et ce sont des idéaux à puissances divisées. Enfin, le Frobenius φ se prolonge à A_{cris} .

L'anneau A_{cris} est une A_{cris}^∇ -algèbre. Pour $i \in \{1, \dots, d\}$, notons u_i l'image de $T_i \otimes 1 - 1 \otimes [\widetilde{T}_i]$ dans A_{cris} . Comme $u_i \in \text{Ker}(\theta_{R_0})$ et $\text{Ker}(\theta_{R_0})$ a des puissances divisées dans A_{cris} , on a un homomorphisme de A_{cris}^∇ -algèbres

$$\begin{aligned} A_{\text{cris}}^\nabla \langle X_1, \dots, X_d \rangle &\longrightarrow A_{\text{cris}} \\ X_i &\longmapsto u_i. \end{aligned}$$

Où $A_{\text{cris}}^\nabla \langle X_1, \dots, X_d \rangle$ désigne l'anneau des polynômes à puissances divisées en les indéterminées X_1, \dots, X_d à coefficients dans A_{cris}^∇ . L'anneau A_{cris} étant séparé et complet pour la topologie p -adique, ce dernier se prolonge en

$$\begin{aligned} f: A_{\text{cris}}^\nabla \{ \langle X_1, \dots, X_d \rangle \} &\longrightarrow A_{\text{cris}} \\ X_i &\longmapsto u_i. \end{aligned}$$

où $A_{\text{cris}}^\nabla \{ \langle X_1, \dots, X_d \rangle \}$ désigne le séparé complété de $A_{\text{cris}}^\nabla \langle X_1, \dots, X_d \rangle$ pour la topologie p -adique.

Proposition 6.1.8. — f est un isomorphisme.

Démonstration. — Notons $\theta: A_{\text{cris}}^\nabla \{ \langle X_1, \dots, X_d \rangle \} \rightarrow \widehat{R}$ l'unique homomorphisme de W -algèbres dont la restriction à A_{cris}^∇ est θ et tel que $\theta(X_i^{[n]}) = 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$ et $n \in \mathbf{N}_{>0}$. On procède de façon analogue à la preuve de la proposition 5.2.2. Comme dans cette dernière, on commence par montrer que la structure de $W\{T_1^{\pm 1}, \dots, T_d^{\pm 1}\}$ -algèbre de $A_{\text{cris}}^\nabla \{ \langle X_1, \dots, X_d \rangle \}$ donnée par $T_i \mapsto \widetilde{T}_i + X_i$ se prolonge de façon unique en une structure de R_0 -algèbre (remarquons que comme \widetilde{T}_i est inversible et $X_i^n = n!X_i^{[n]}$ tend vers 0 pour la topologie p -adique lorsque n tend vers l'infini, l'élément $\widetilde{T}_i + X_i$ est bien inversible dans $A_{\text{cris}}^\nabla \{ \langle X_1, \dots, X_d \rangle \}$). Commençons par le voir modulo p .

Posons $\mathcal{A} = (\mathcal{R}/\widetilde{p}\mathcal{R})[X_1, \dots, X_d]/(X_1^p, \dots, X_d^p)$ et notons $\bar{\theta}: \mathcal{A} \rightarrow \overline{R}/p\overline{R}$ la réduction de θ modulo p (sur $\mathcal{R}/\widetilde{p}\mathcal{R}$, c'est l'application $x \mapsto x_0$, et $\bar{\theta}(X_i) = 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$). Son noyau \mathcal{I} est l'idéal de \mathcal{A} engendré par \widetilde{p} et $\{X_i\}_{1 \leq i \leq d}$ (d'après la proposition 5.1.2, l'homomorphisme $\mathcal{R}/\widetilde{p}\mathcal{R} \rightarrow \overline{R}/p\overline{R}; x \mapsto x_0$ est un isomorphisme). Notons $\bar{\gamma}: R_0/pR_0 \rightarrow \overline{R}/p\overline{R}$ l'inclusion. C'est un homomorphisme $\bar{\gamma}: R_0/pR_0 \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{I}$, tel que $\bar{\gamma}(T_i) = T_i$ est l'image de $\widetilde{T}_i \in \mathcal{A}$ par $\bar{\theta}$. On a donc un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} R_0/pR_0 & \hookrightarrow & \mathcal{A}/\mathcal{I} \\ \uparrow & \searrow \bar{\gamma} & \uparrow \bar{\theta} \\ k[T_1^{\pm 1}, \dots, T_d^{\pm 1}] & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ & & \uparrow \\ & & T_i \longmapsto \widetilde{T}_i + X_i \end{array}$$

Remarquons que $\mathcal{I}^{(d+1)p} = 0$ dans \mathcal{A} . Comme R_0/pR_0 est obtenu à partir de $k[T_1^{\pm 1}, \dots, T_d^{\pm 1}]$ en itérant les opérations (ét), (loc) et (comp) *i.e.* extension étale, localisation et complétion, l'homomorphisme $\bar{\gamma}$ se prolonge de façon unique en $\bar{\gamma}: R_0/pR_0 \rightarrow \mathcal{A}$ (en pointillé sur le diagramme). Dans le cas (comp), cela résulte de ce que \mathcal{R} n'a pas de \widetilde{p} -torsion (parce que \widehat{R} n'en a pas).

Posons $\widetilde{\mathcal{A}} = A_{\text{cris}}^\nabla \langle X_1, \dots, X_d \rangle$. On a

$$\widetilde{\mathcal{A}} \simeq (A_{\text{cris}}^\nabla[X_1, \dots, X_d])[X_{i,0}, X_{i,1}, \dots] / (pX_{i,0} - X_i^p, pX_{i,m+1} - X_{i,m}^p)_{\substack{1 \leq i \leq d \\ m \in \mathbf{N}}}$$

(*cf.* preuve de la proposition 6.1.2) d'où

$$\widetilde{\mathcal{A}}/p\widetilde{\mathcal{A}} \simeq (A_{\text{cris}}^\nabla/pA_{\text{cris}}^\nabla)[X_1, \dots, X_d][X_{i,0}, X_{i,1}, \dots] / (X_i^p, X_{i,m}^p)_{\substack{1 \leq i \leq d \\ m \in \mathbf{N}}}$$

Par ailleurs, d'après le corollaire 6.1.3, on a $A_{\text{cris}}^\nabla/pA_{\text{cris}}^\nabla \simeq (\mathcal{R}/\widetilde{p}\mathcal{R})[\delta_0, \delta_1, \dots] / (\delta_m^p)_{m \in \mathbf{N}}$, donc

$$\widetilde{\mathcal{A}}/p\widetilde{\mathcal{A}} \simeq \mathcal{A}[\delta_0, \delta_1, \dots, X_{i,0}, X_{i,1}, \dots] / (\delta_m^p, X_{i,m}^p)_{\substack{1 \leq i \leq d \\ m \in \mathbf{N}}}$$

On dispose donc d'un unique homomorphisme de $k[T_1^{\pm 1}, \dots, T_d^{\pm 1}]$ -algèbres $\bar{\gamma}: R_0/pR_0 \rightarrow \widetilde{\mathcal{A}}/p\widetilde{\mathcal{A}}$. Relevons-le en caractéristique 0.

On a une suite

$$W\{T_1^{\pm 1}, \dots, T_d^{\pm 1}\} = R_0^{(0)} \subseteq R_0^{(1)} \subseteq \dots \subseteq R_0^{(N)} = R_0$$

de sous- $W\{T_1^{\pm 1}, \dots, T_d^{\pm 1}\}$ -algèbres fermées de \tilde{R} telles que pour tout $j \in \{1, \dots, N\}$, l'extension $R_0^{(j-1)} \subseteq R_0^{(j)}$ est du type (ét), (loc) ou (comp). Soit $n \in \mathbf{N}_{>0}$. Si on dispose d'un homomorphisme de $k[T_1^{\pm 1}, \dots, T_d^{\pm 1}]$ -algèbres $R_0^{(j-1)}/p^n R_0^{(j-1)} \rightarrow \tilde{\mathcal{A}}/p^n \tilde{\mathcal{A}}$, le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} R_0^{(j)}/p^n R_0^{(j)} & \longrightarrow & \tilde{\mathcal{A}}/p \tilde{\mathcal{A}} \\ \uparrow & \searrow & \uparrow \\ R_0^{(j-1)}/p^n R_0^{(j-1)} & \longrightarrow & \tilde{\mathcal{A}}/p^n \tilde{\mathcal{A}} \end{array}$$

se complète donc de façon unique avec un homomorphisme de $R_0^{(j-1)}/p^n R_0^{(j-1)}$ -algèbres $R_0^{(j)}/p^n R_0^{(j)} \rightarrow \tilde{\mathcal{A}}/p^n \tilde{\mathcal{A}}$. Dans le cas d'une extension de type (comp), on utilise le fait que $\tilde{\mathcal{A}}$ n'a pas de p -torsion (ce qui résulte du fait que A_{cris}^{∇} n'en a pas d'après la proposition 6.1.4) de la façon suivante. Si $R_0^{(j)}$ est le complété de $R_0^{(j-1)}$ pour la topologie I_j -adique, et si $\tilde{\mathcal{A}}/p \tilde{\mathcal{A}}$ est séparé et complet pour la topologie I_j -adique, il en est de même de $\tilde{\mathcal{A}}/p^n \tilde{\mathcal{A}}$, qui est donc une $R_0^{(j-1)}/p^n R_0^{(j-1)}$ de façon unique. Cela se montre par récurrence sur n , en utilisant le diagramme à lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \tilde{\mathcal{A}}/p \tilde{\mathcal{A}} & \xrightarrow{p^{n-1}} & \tilde{\mathcal{A}}/p^n \tilde{\mathcal{A}} & \longrightarrow & \tilde{\mathcal{A}}/p^{n-1} \tilde{\mathcal{A}} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \sim & & \downarrow & & \downarrow \sim \\ 0 & \longrightarrow & \varprojlim_m \tilde{\mathcal{A}}/(p, I_j^m) \tilde{\mathcal{A}} & \longrightarrow & \varprojlim_m \tilde{\mathcal{A}}/(p^n, I_j^m) \tilde{\mathcal{A}} & \longrightarrow & \varprojlim_m \tilde{\mathcal{A}}/(p^{n-1}, I_j^m) \tilde{\mathcal{A}} \end{array}$$

Il existe donc une unique suite $(g_n: R_0 \rightarrow \tilde{\mathcal{A}}/p^n \tilde{\mathcal{A}})_{n \in \mathbf{N}_{>0}}$ de morphismes de $W\{T_1^{\pm 1}, \dots, T_d^{\pm 1}\}$ -algèbres. Par unicité, ils forment un système projectif : on en déduit un morphisme de $W\{T_1^{\pm 1}, \dots, T_d^{\pm 1}\}$ -algèbres $g: R_0 \rightarrow \varprojlim_n \tilde{\mathcal{A}}/p^n \tilde{\mathcal{A}} = A_{\text{cris}}^{\nabla}\{\langle X_1, \dots, X_d \rangle\}$.

Notons $\bar{\theta}: \tilde{\mathcal{A}}/p \tilde{\mathcal{A}} \rightarrow \overline{R}/p \overline{R}$ la réduction de θ modulo p . Rappelons que par construction, $\bar{\theta} \circ \bar{g}$ est l'inclusion de $R_0/p R_0$ dans $\overline{R}/p \overline{R}$. Ainsi, les réductions modulo p de $\theta \circ g$ et de l'inclusion de R_0 dans \widehat{R} coïncident. Comme \overline{R} n'a pas de p -torsion, un raisonnement identique au précédent montre qu'ils coïncident modulo p^n pour tout $n \in \mathbf{N}_{>1}$, et donc qu'ils sont égaux.

Par $W(\mathcal{R})$ -linéarité, g se prolonge en $g: R_0 \otimes_W W(\mathcal{R}) \rightarrow A_{\text{cris}}^{\nabla}\{\langle X_1, \dots, X_d \rangle\}$, et d'après ce qui précède, l'homomorphisme $\theta \circ g: R_0 \otimes_W W(\mathcal{R}) \rightarrow \widehat{R}$ est l'homomorphisme θ . En particulier, on a $g(\text{Ker}(\theta_{R_0})) \subset \text{Ker}(\theta: A_{\text{cris}}^{\nabla}\{\langle X_1, \dots, X_d \rangle\} \rightarrow \widehat{R})$. Ce dernier ayant des puissances divisées, l'homomorphisme se prolonge en $g: W(\mathcal{R})_{R_0}^{\text{DP}} \rightarrow A_{\text{cris}}^{\nabla}\{\langle X_1, \dots, X_d \rangle\}$. Enfin, comme $A_{\text{cris}}^{\nabla}\{\langle X_1, \dots, X_d \rangle\}$ est séparé et complet pour la topologie p -adique, g se prolonge en $g: A_{\text{cris}} \rightarrow A_{\text{cris}}^{\nabla}\{\langle X_1, \dots, X_d \rangle\}$.

Un raisonnement identique à celui finissant la preuve de la proposition 5.2.2 montre alors que g et f sont bijectifs, inverses l'un de l'autre. \square

La proposition 6.1.8 permet d'identifier A_{cris}^{∇} à un sous-anneau de $A_{\text{cris}}(R_0)$, et d'écrire

$$A_{\text{cris}}(R_0) = A_{\text{cris}}^{\nabla}\{\langle u_1, \dots, u_d \rangle\}.$$

En outre, l'anneau $A_{\text{cris}}(R_0)$ ne dépend que de \overline{R} et des T_i .

Corollaire 6.1.9. — Pour tout $n \in \mathbf{N}_{>0}$, on a un isomorphisme de

$$W_n(\mathcal{R})[T_1, \dots, T_d, \delta_0, \delta_1, \dots, X_{i,0}, X_{i,1}, \dots] / (p\delta_0 - \xi^p, p\delta_{m+1} - \delta_m^p, pX_{i,0} - u_i^p, pX_{i,m+1} - X_{i,m}^p)_{\substack{1 \leq i \leq d \\ m \in \mathbf{N}_{>0}}}$$

sur $A_{\text{cris}}/p^n A_{\text{cris}}$ où $X_{i,m}$ s'envoie sur $\gamma^{m+1}(u_i)$ et δ_m sur $\gamma^{m+1}(\xi)$. En particulier, on a un isomorphisme

$$(\mathcal{R}/\tilde{p}^p \mathcal{R})[T_1, \dots, T_d, \delta_0, \delta_1, \dots, X_{i,0}, X_{i,1}, \dots] / (u_i^p, \delta_m^p, X_{i,m}^p)_{\substack{1 \leq i \leq d \\ m \in \mathbf{N}}} \xrightarrow{\sim} A_{\text{cris}}/p A_{\text{cris}}.$$

Proposition 6.1.10. — A_{cris} n'a pas de p -torsion.

Démonstration. — D'après la proposition 6.1.8, il suffit de voir que l'anneau des polynômes à puissances divisées $A_{\text{cris}}^{\nabla}\langle X_1, \dots, X_d \rangle$ n'a pas de p -torsion. Cela résulte du fait que A_{cris}^{∇} n'a pas de p -torsion (proposition 6.1.4). En effet, on a alors $A_{\text{cris}}^{\nabla}\langle X_1, \dots, X_d \rangle \subset A_{\text{cris}}^{\nabla}[p^{-1}][X_1, \dots, X_d]$. \square

Définition 6.1.11. — On pose $B_{\text{cris}}^+(R_0) = A_{\text{cris}}(R_0)[p^{-1}]$ et $B_{\text{cris}}(R_0) = B_{\text{cris}}^+(R_0)[t^{-1}]$.

Ce sont des $R_0[p^{-1}]$ -algèbres munies d'une action de \mathcal{G}_R et d'un Frobenius φ qui est σ -linéaire. Là encore la construction est fonctorielle en R_0 , et on notera B_{cris}^+ et B_{cris} lorsqu'aucune confusion n'en résulte. D'après la proposition 6.1.10, l'homomorphisme $A_{\text{cris}} \rightarrow B_{\text{cris}}^+$ est injectif, et on verra plus tard (corollaire 6.2.3), que $B_{\text{cris}}^+ \rightarrow B_{\text{cris}}$ l'est aussi.

Rappelons que R_0^{nr} désigne la réunion des sous- R_0 -algèbres finies étales de \overline{R} et $\widehat{R_0^{\text{nr}}}$ son séparé complété pour la topologie p -adique. D'après ce qui précède, l'anneau A_{cris} est une R_0^{nr} -algèbre. Comme A_{cris} est séparé et complet pour la topologie p -adique, c'est donc en fait une $\widehat{R_0^{\text{nr}}}$ -algèbre, et les anneaux B_{cris}^+ et B_{cris} sont des $\widehat{R_0^{\text{nr}}}[p^{-1}]$ -algèbres.

6.2. Relations avec B_{dR}

6.2.1. Plongements dans B_{dR} . —

Si $n \in \mathbf{N}_{>0}$, on dispose de l'homomorphisme

$$R_0 \otimes_W W(\mathcal{R}) \rightarrow (R \otimes_W W(\mathcal{R}))[p^{-1}] / (\text{Ker}(\theta_R))^n \rightarrow A_{\text{inf}}(\widehat{R}/R)[p^{-1}] / \text{Ker}(\theta)^n = B_{\text{dR}}^+ / (\text{Ker}(\theta))^n.$$

Comme $B_{\text{dR}}^+ / (\text{Ker}(\theta))^n$ admet des puissances divisées relativement à l'idéal $\text{Ker}(\theta_R) / (\text{Ker}(\theta_R))^n$ (car p est inversible), il induit un homomorphisme $W(\mathcal{R})_{R_0}^{\text{DP}} \rightarrow B_{\text{dR}}^+ / (\text{Ker}(\theta_R))^n$. Comme le gradué de $B_{\text{dR}}^+ / (\text{Ker}(\theta_R))^n$ (pour la filtration définie par les puissances de l'idéal $\text{Ker}(\theta_R) / (\text{Ker}(\theta_R))^n$) est un C -module libre de rang fini (proposition 5.2.5), il se prolonge en un homomorphisme $A_{\text{cris}} \rightarrow B_{\text{dR}}^+ / (\text{Ker}(\theta_R))^n$. Ces homomorphismes sont bien sûr compatibles entre eux pour $n \in \mathbf{N}_{>0}$: on a un homomorphisme naturel $A_{\text{cris}} \rightarrow B_{\text{dR}}^+$.

De même, on dispose d'un homomorphisme naturel $A_{\text{cris}}^{\nabla} \rightarrow B_{\text{dR}}^{\nabla+}$. Notons qu'avec les isomorphismes des propositions 5.2.2 et 6.1.8, l'homomorphisme $A_{\text{cris}} \rightarrow B_{\text{dR}}^+$ s'identifie alors à l'homomorphisme naturel

$$A_{\text{cris}}^{\nabla} \{ \langle u_1, \dots, u_d \rangle \} \rightarrow B_{\text{dR}}^{\nabla+} \llbracket u_1, \dots, u_d \rrbracket.$$

Proposition 6.2.1. — *Les homomorphismes $A_{\text{cris}} \rightarrow B_{\text{dR}}^+$ et $A_{\text{cris}}^{\nabla} \rightarrow B_{\text{dR}}^{\nabla+}$ sont injectifs.*

Démonstration. — Notons $h: A_{\text{cris}}^{\nabla} \rightarrow B_{\text{dR}}^{\nabla+}$ l'homomorphisme naturel construit plus haut. L'injectivité de l'homomorphisme $A_{\text{cris}}^{\nabla} \{ \langle u_1, \dots, u_d \rangle \} \rightarrow B_{\text{dR}}^{\nabla+} \llbracket u_1, \dots, u_d \rrbracket$ résultant de celle de h , il suffit de vérifier cette dernière.

On a un homomorphisme canonique $W(\mathcal{R}) \rightarrow A_{\text{cris}}^{\nabla}$ et donc un homomorphisme $B_{\text{dR}}^{\nabla+} \rightarrow A_{\text{cris}}^{\nabla}[p^{-1}]$ (où $A_{\text{cris}}^{\nabla}[p^{-1}]$ est le séparé complété de $A_{\text{cris}}^{\nabla}[p^{-1}]$ pour la topologie $\text{Ker}(\theta)$ -adique). Cet homomorphisme est un isomorphisme. Il s'agit donc de montrer que A_{cris}^{∇} est séparé pour la topologie définie par les sous-groupes $\{h^{-1}((\text{Ker}(\theta))^n)\}_{n \in \mathbf{N}_{>0}}$.

Si n est un entier non nul, on note $J^{[n]}$ l'adhérence (pour la topologie p -adique) de l'idéal de A_{cris}^{∇} engendré par les $\xi^{[r]}$ pour $r \geq n$. Montrons par récurrence sur n que $h^{-1}((\text{Ker}(\theta))^n) = J^{[n]}$. On a $J^{[n]} \subseteq h^{-1}((\text{Ker}(\theta))^n)$ et $J^{[1]} = h^{-1}(\text{Ker}(\theta))$ (proposition 5.1.2). Soit $n > 1$. Supposons que $J^{[n-1]} = h^{-1}((\text{Ker}(\theta))^{n-1})$ et soit $x \in h^{-1}((\text{Ker}(\theta))^n)$. Alors $x = \xi^{[n-1]}x_0 + x_1$ avec $x_0 \in W(\mathcal{R})$ et $x_1 \in J^{[n-1]}$. On a alors $h(\xi^{[n-1]}x_0) \in \text{Ker}(\theta)^n$, i.e. $x_0 \in \text{Ker}(\theta) = \xi W(\mathcal{R})$, soit $x \in \xi \xi^{[n-1]} W(\mathcal{R}) + J^{[n]} = J^{[n]}$.

D'après le corollaire 6.1.3, l'anneau $A_{\text{cris}}^{\nabla}/p A_{\text{cris}}^{\nabla}$ s'identifie à $(\mathcal{R}/\widehat{p^p \mathcal{R}})[\delta_0, \delta_1, \dots] / (\delta_m^p)_{m \in \mathbf{N}}$, où δ_m est l'image de $\gamma^{m+1}(\xi)$ (γ désignant l'application $x \mapsto \frac{x^p}{p}$). Avec cette identification, si $N \in \mathbf{N}_{>0}$, l'image de $J^{[N]}$ dans $A_{\text{cris}}^{\nabla}/p A_{\text{cris}}^{\nabla}$ est incluse dans l'idéal engendré par les δ_m pour $m \geq N-1$. On a donc $\bigcap_{n \in \mathbf{N}_{>0}} J^{[n]} \subseteq p A_{\text{cris}}^{\nabla}$.

L'anneau A_{cris}^{∇} étant sans p -torsion (proposition 6.1.4), on a donc $\bigcap_{n \in \mathbf{N}_{>0}} J^{[n]} \subseteq p^m A_{\text{cris}}^{\nabla}$ pour tout $m \in \mathbf{N}_{>0}$.

Comme A_{cris}^{∇} est séparé pour la topologie p -adique, on a $\bigcap_{n \in \mathbf{N}_{>0}} J^{[n]} = \{0\}$, ce qu'on voulait. \square

Corollaire 6.2.2. — *Les anneaux A_{cris} et A_{cris}^{∇} sont sans t -torsion.*

Démonstration. — Cela résulte de la propriété 6.2.1 et de l'énoncé analogue pour B_{dR}^+ et $B_{\text{dR}}^{\nabla+}$ (propositions 5.1.5 et 5.2.2). \square

Corollaire 6.2.3. — *Les homomorphismes $B_{\text{cris}}^+ \rightarrow B_{\text{cris}}$ et $B_{\text{cris}}^{\nabla+} \rightarrow B_{\text{cris}}^{\nabla}$ sont injectifs. Les homomorphismes naturels $B_{\text{cris}} \rightarrow B_{\text{dR}}$ et $B_{\text{cris}}^{\nabla} \rightarrow B_{\text{dR}}^{\nabla}$ sont injectifs.*

Proposition 6.2.4. — *L'application $u_{\text{cris}}: R_0[p^{-1}] \otimes_{W[p^{-1}]} B_{\text{cris}}^{\nabla} \rightarrow B_{\text{cris}}$ est injective.*

Démonstration. — D'après la proposition 5.3.8 (appliquée avec $R = R_0$), l'application $u_{dR}: R_0[p^{-1}] \otimes_{W[p^{-1}]} B_{dR}^\nabla \rightarrow B_{dR}$ est injective. L'injectivité de u_{cris} résulte alors de la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} R_0[p^{-1}] \otimes_{W[p^{-1}]} B_{\text{cris}}^\nabla & \xrightarrow{u_{\text{cris}}} & B_{\text{cris}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ R_0[p^{-1}] \otimes_{W[p^{-1}]} B_{dR}^\nabla & \xrightarrow{u_{dR}} & B_{dR} \end{array}$$

et de l'injectivité de $B_{\text{cris}} \rightarrow B_{dR}$ (corollaire 6.2.3). \square

Le corollaire 6.2.3 permet de munir B_{cris} et B_{cris}^∇ de structures supplémentaires, déduites de celles de B_{dR} . Pour $r \in \mathbf{Z}$, on pose $\text{Fil}^r B_{\text{cris}} = B_{\text{cris}} \cap \text{Fil}^r B_{dR}$ et $\text{Fil}^r B_{\text{cris}}^\nabla = B_{\text{cris}}^\nabla \cap \text{Fil}^r B_{dR}$. On munit ainsi B_{cris} (resp. B_{cris}^∇) d'une filtration $\text{Fil}^\bullet B_{\text{cris}}$ (resp. $\text{Fil}^\bullet B_{\text{cris}}^\nabla$) décroissante séparée et exhaustive (cf. corollaire 5.2.9).

De même, l'anneau B_{dR} est muni d'une connexion $\nabla: B_{dR} \rightarrow B_{dR} \otimes_{R_0[p^{-1}]} \widehat{\Omega}_{R_0}^1[p^{-1}]$. Cette dernière est caractérisée par le fait que le module des sections horizontales de $B_{dR}^+ = B_{dR}^{\nabla+}[[u_1, \dots, u_d]]$ est $B_{dR}^{\nabla+}$ et que $\nabla(u_i) = dT_i$ pour $i \in \{1, \dots, d\}$. Pour tout entier n , on a $\nabla(u_i^{[n]}) = u_i^{[n-1]} \otimes dT_i$: pour tout $x \in A_{\text{cris}} = A_{\text{cris}}^\nabla\langle\{u_1, \dots, u_d\}\rangle$ (cf. proposition 6.1.8), on a donc $\nabla(x) \in A_{\text{cris}} \otimes_{R_0} \widehat{\Omega}_{R_0}^1$. La connexion ∇ induit donc une connexion $\nabla: B_{\text{cris}} \rightarrow B_{\text{cris}} \otimes_{R_0[p^{-1}]} \widehat{\Omega}_{R_0}^1[p^{-1}]$.

Les sections horizontales de B_{dR}^+ sont les éléments de $B_{dR}^{\nabla+}$: on a donc $(A_{\text{cris}})^{\nabla=0} = A_{\text{cris}}^\nabla$, et comme p et t sont horizontaux, $(B_{\text{cris}}^+)^{\nabla=0} = B_{\text{cris}}^{\nabla+}$ et $(B_{\text{cris}})^{\nabla=0} = B_{\text{cris}}^\nabla$, ce qui là encore justifie les notations *a posteriori*. En outre, la connexion sur B_{cris} a la propriété de Griffith pour la filtration $\text{Fil}^\bullet B_{\text{cris}}$, car c'est le cas sur B_{dR} pour la filtration $\text{Fil}^\bullet B_{dR}$ (cf. proposition 5.3.9).

On munit le $R_0[p^{-1}]$ -module $\widehat{\Omega}_{R_0}^1[p^{-1}]$ de l'unique application σ -linéaire φ vérifiant $\varphi(dx) = d\sigma(x)$ pour $x \in R_0$.

Proposition 6.2.5. — *Sur B_{cris} , on a $\varphi\nabla = \nabla\varphi$.*

Démonstration. — Comme p et t sont horizontaux, cela se vérifie sur $A_{\text{cris}} = A_{\text{cris}}^\nabla\langle\{u_1, \dots, u_d\}\rangle$.

Pour $\underline{n} = (n_1, \dots, n_d) \in \mathbf{N}^d$, on pose $\underline{u}^{[\underline{n}]} = \prod_{i=1}^d u_i^{[n_i]}$ et $\varphi(\underline{u})^{[\underline{n}]} = \prod_{i=1}^d \varphi(u_i)^{[n_i]}$. Par A_{cris}^∇ -linéarité, il suffit de vérifier que $(\varphi \circ \nabla)(\underline{u}^{[\underline{n}]}) = (\nabla \circ \varphi)(\underline{u}^{[\underline{n}]})$ pour tout $\underline{n} \in \mathbf{N}^d$. On a

$$\begin{aligned} (\nabla \circ \varphi)(\underline{u}^{[\underline{n}]}) &= \nabla(\varphi(\underline{u})^{[\underline{n}]}) = \sum_{i=1}^d N_i(\varphi(\underline{u})^{[\underline{n}]}) \otimes d \log(T_i) = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \varphi(\underline{u})^{[\underline{n}-\underline{e}_j]} N_i(\varphi(u_j)) \otimes d \log(T_i) \\ &= \sum_{j=1}^d \varphi(\underline{u})^{[\underline{n}-\underline{e}_j]} \left(\sum_{i=1}^d N_i(\varphi(u_j)) \otimes d \log(T_i) \right) = \sum_{j=1}^d \varphi(\underline{u})^{[\underline{n}-\underline{e}_j]} \nabla(\varphi(u_j)) \end{aligned}$$

où $\underline{e}_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbf{N}^d$ (le 1 étant sur la j -ième coordonnée). Par ailleurs, on a $\varphi(u_j) - \sigma(T_j) \in A_{\text{cris}}^\nabla$, d'où $\nabla(\varphi(u_j)) = d\sigma(T_j) = \sigma(T_j)\varphi(d \log(T_j))$. On a donc

$$(\nabla \circ \varphi)(\underline{u}^{[\underline{n}]}) = \sum_{j=1}^d \varphi(\underline{u})^{[\underline{n}-\underline{e}_j]} \otimes \sigma(T_j)\varphi(d \log(T_j)) = \varphi\left(\sum_{j=1}^d T_j \underline{u}^{[\underline{n}-\underline{e}_j]} \otimes d \log(T_j)\right) = (\varphi \circ \nabla)(\underline{u}^{[\underline{n}]})$$

\square

Rappelons (cf. section 3.3), que T désigne l'ensemble des idéaux premiers de \overline{R} au-dessus de pR_0 . On dispose d'un homomorphisme naturel \mathcal{G}_{R_0} -équivariant $\Psi: \widehat{R_{0(p)}} \otimes_{R_0} \widehat{R} \rightarrow \prod_{\mathfrak{p} \in T} \widehat{R}_{\mathfrak{p}}$, injectif d'après la proposition 3.3.3.

En outre, si $\mathfrak{p} \in T$, on a un homomorphisme de restriction $\widehat{\mathcal{G}}_R(\mathfrak{p}) \rightarrow \mathcal{G}_R$ (où $\widehat{\mathcal{G}}_R(\mathfrak{p})$ désigne le groupe de Galois absolu du corps $\widehat{R}_{\mathfrak{p}}[p^{-1}]$, la clôture algébrique de $\widehat{R}_{\mathfrak{p}}[p^{-1}]$ choisie contenant $\overline{R}_{\mathfrak{p}}$), dont l'image est précisément le sous-groupe de décomposition $\mathcal{G}_R(\mathfrak{p})$ de \mathcal{G}_R en \mathfrak{p} (lemme 3.3.1).

L'application Ψ modulo p fournit un homomorphisme injectif $\overline{R}/p\overline{R} \rightarrow \prod_{\mathfrak{p} \in T} \overline{R}_{\mathfrak{p}}/p\overline{R}_{\mathfrak{p}}$. En prenant la limite projective (les morphismes de transition étant donnés par le Frobenius), on en déduit un homomorphisme $\mathcal{R}(R) \rightarrow \prod_{\mathfrak{p} \in T} \mathcal{R}(\mathfrak{p})$ (où $\mathcal{R}(\mathfrak{p}) = \varprojlim \overline{R}_{\mathfrak{p}}/p\overline{R}_{\mathfrak{p}}$), d'où un homomorphisme $W(\mathcal{R}(R)) \rightarrow \prod_{\mathfrak{p} \in T} W(\mathcal{R}(\mathfrak{p}))$. Ce dernier induit des homomorphismes

$$B_{dR}(R) \rightarrow \prod_{\mathfrak{p} \in T} B_{dR}(\mathfrak{p})$$

$$\text{et } B_{\text{cris}}(R_0) \rightarrow \prod_{\mathfrak{p} \in T} B_{\text{cris}}(\mathfrak{p})$$

où $B_{\text{dR}}(\mathfrak{p})$ (resp. $B_{\text{cris}}(\mathfrak{p})$) désigne le séparé complété de $A_{\text{inf}}(\mathcal{O}_{C(\mathfrak{p})}/\widehat{R}_{\mathfrak{p}})[p^{-1}]$ pour la topologie $\text{Ker}(\theta)$ -adique (resp. le séparé complété, pour la topologie p -adique, de l'enveloppe à puissances divisées de $\widehat{R}_{0(p)} \otimes_W W(\mathcal{R}(\mathfrak{p}))$ dans lequel on a inversé p). Ils induisent des homomorphismes \mathcal{G}_{R_0} -équivariants

$$\Psi: \widehat{R}_{0(p)}[p^{-1}] \otimes_{R_0[p^{-1}]} B_{\text{dR}}(R) \rightarrow \prod_{\mathfrak{p} \in T} B_{\text{dR}}(\mathfrak{p})$$

$$\text{et } \Psi: \widehat{R}_{0(p)}[p^{-1}] \otimes_{R_0[p^{-1}]} B_{\text{cris}}(R_0) \rightarrow \prod_{\mathfrak{p} \in T} B_{\text{cris}}(\mathfrak{p}).$$

Pour tout $\mathfrak{p} \in T$, on a un homomorphisme $i_{\mathfrak{p}}: B_{\text{dR}}(\mathfrak{p}) \rightarrow B_{\text{dR}}(\widehat{R}_{\mathfrak{p}})$ déduit de l'inclusion $\overline{R}_{\mathfrak{p}} \rightarrow \overline{\widehat{R}_{\mathfrak{p}}}$. On a alors le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} & & \prod_{\mathfrak{p} \in T} B_{\text{dR}}(\mathfrak{p}) \\ & \nearrow \Psi & \downarrow \prod i_{\mathfrak{p}} \\ \widehat{R}_{0(p)}[p^{-1}] \otimes_{R_0[p^{-1}]} B_{\text{dR}}(R) & & \prod_{\mathfrak{p} \in T} B_{\text{dR}}(\widehat{R}_{\mathfrak{p}}) \\ & \searrow \widehat{\Psi} & \end{array}$$

et un diagramme analogue avec B_{cris} .

Proposition 6.2.6. — Ψ et $\widehat{\Psi}$ sont injectifs (sur $\widehat{R}_{0(p)}[p^{-1}] \otimes_{R_0[p^{-1}]} B_{\text{dR}}(R)$ et sur $\widehat{R}_{0(p)}[p^{-1}] \otimes_{R_0[p^{-1}]} B_{\text{cris}}(R_0)$).

Démonstration. — Montrons l'injectivité sur $\widehat{R}_{0(p)}[p^{-1}] \otimes_{R_0[p^{-1}]} B_{\text{dR}}(R)$. Pour $\widehat{\Psi}$, cela se voit sur le gradué (les anneaux $\widehat{R}_{0(p)}[p^{-1}] \otimes_{R_0[p^{-1}]} B_{\text{dR}}(R)$ et $B_{\text{dR}}(\widehat{R}_{\mathfrak{p}})$ étants munis de la filtration construite en 5.2) : d'après la proposition 5.2.6, cela résulte de l'injectivité de l'application $\widehat{R}_{0(p)}[p^{-1}] \otimes_{R_0[p^{-1}]} C \rightarrow \prod_{\mathfrak{p} \in T} C(\mathfrak{p})$, qui est le composé

de $\Psi: \widehat{R}_{0(p)}[p^{-1}] \otimes_{R_0[p^{-1}]} C \rightarrow \prod_{\mathfrak{p} \in T} \widehat{R}_{\mathfrak{p}}[p^{-1}]$ (injectif d'après la proposition 3.3.3) et de l'inclusion $\prod_{\mathfrak{p} \in T} \widehat{R}_{\mathfrak{p}}[p^{-1}] \rightarrow \prod_{\mathfrak{p} \in T} C(\mathfrak{p})$. L'injectivité de Ψ en résulte.

Sur $\widehat{R}_{0(p)}[p^{-1}] \otimes_{R_0[p^{-1}]} B_{\text{cris}}(R_0)$, cela résulte de la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} \widehat{R}_{0(p)}[p^{-1}] \otimes_{R_0[p^{-1}]} B_{\text{dR}}(R) & \xrightarrow{\widehat{\Psi}} & \prod_{\mathfrak{p} \in T} B_{\text{dR}}(\widehat{R}_{\mathfrak{p}}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \widehat{R}_{0(p)}[p^{-1}] \otimes_{R_0[p^{-1}]} B_{\text{cris}}(R_0) & \xrightarrow{\widehat{\Psi}} & \prod_{\mathfrak{p} \in T} B_{\text{cris}}(\widehat{R}_{0(p)}) \end{array}$$

de l'injectivité de $\widehat{\Psi}$ sur $\widehat{R}_{0(p)}[p^{-1}] \otimes_{R_0[p^{-1}]} B_{\text{dR}}(R)$ et de la platitude de $\widehat{R}_{0(p)}$ sur R_0 . \square

Rappelons que la condition (BR) est $R = \widetilde{R} = R_0[\varpi]$ (c'est une hypothèse de bonne réduction).

Proposition 6.2.7. — Supposons la condition (BR) vérifiée. Alors l'homomorphisme naturel

$$R[p^{-1}] \otimes_{R_0[p^{-1}]} B_{\text{cris}} \rightarrow B_{\text{dR}}$$

est injectif.

Démonstration. — Notons f_R l'homomorphisme en question. L'anneau $\widehat{R}_{(p)}[p^{-1}]$ est le produit des corps $\widehat{R}_{\mathfrak{p}}[p^{-1}]$ (il y en a un nombre fini, autant que d'idéaux premiers de R au-dessus de pR_0). Il est donc plat sur $\widehat{R}_{0(p)}[p^{-1}]$. L'homomorphisme

$$\widehat{R}_{(p)}[p^{-1}] \otimes \widehat{\Psi}: \widehat{R}_{(p)}[p^{-1}] \otimes_{R_0[p^{-1}]} B_{\text{cris}}(R_0) \rightarrow \widehat{R}_{(p)}[p^{-1}] \otimes_{\widehat{R}_{0(p)}[p^{-1}]} \left(\prod_{\mathfrak{p} \in T} B_{\text{cris}}(\widehat{R}_{0(p)}) \right)$$

est donc injectif. Comme $\widehat{R}_{(p)}[p^{-1}] \otimes_{\widehat{R}_{0(p)}[p^{-1}]} \left(\prod_{\mathfrak{p} \in T} B_{\text{cris}}(\widehat{R}_{0(p)}) \right) \subset \prod_{\mathfrak{p} \in T} \widehat{R}_{(p)}[p^{-1}] \otimes_{\widehat{R}_{0(p)}[p^{-1}]} B_{\text{cris}}(\widehat{R}_{0(p)})$, l'homomorphisme composé

$$\widehat{R}_{(p)}[p^{-1}] \otimes_{R_0[p^{-1}]} B_{\text{cris}}(R_0) \rightarrow \prod_{\mathfrak{p} \in T} \widehat{R}_{(p)}[p^{-1}] \otimes_{\widehat{R}_{0(p)}[p^{-1}]} B_{\text{cris}}(\widehat{R}_{0(p)})$$

est injectif. Ce dernier est le composé de

$$\widehat{\Psi}_R: \widehat{R}_{(p)}[p^{-1}] \otimes_{R_0[p^{-1}]} \mathbf{B}_{\text{cris}}(R_0) \rightarrow \prod_{\mathfrak{p} \in T} \widehat{R}_{\mathfrak{p}}[p^{-1}] \otimes_{\widehat{R}_{0(p)}[p^{-1}]} \mathbf{B}_{\text{cris}}(\widehat{R}_{0(p)})$$

et de $\prod_{\mathfrak{p} \in T} \widehat{R}_{\mathfrak{p}}[p^{-1}] \otimes_{\widehat{R}_{0(p)}[p^{-1}]} \mathbf{B}_{\text{cris}}(\widehat{R}_{0(p)}) \rightarrow \prod_{\mathfrak{p} \in T} \widehat{R}_{(p)}[p^{-1}] \otimes_{\widehat{R}_{0(p)}[p^{-1}]} \mathbf{B}_{\text{cris}}(\widehat{R}_{0(p)})$ déduit, sur la coordonnée $\mathfrak{p} \in T$, de l'inclusion $\widehat{R}_{\mathfrak{p}}[p^{-1}] \rightarrow \widehat{R}_{(p)}[p^{-1}]$. L'homomorphisme $\widehat{\Psi}_R$ est donc injectif. On a alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \widehat{R}_{0(p)}[p^{-1}] \otimes_{R_0[p^{-1}]} \mathbf{B}_{\text{dR}}(R) & \xrightarrow{\widehat{\Psi}} & \prod_{\mathfrak{p} \in T} \mathbf{B}_{\text{dR}}(\widehat{R}_{\mathfrak{p}}) \\ \uparrow \widehat{R}_{(p)}[p^{-1}] \otimes f_R & & \uparrow \prod f_{\widehat{R}_{\mathfrak{p}}} \\ \widehat{R}_{(p)}[p^{-1}] \otimes_{R_0[p^{-1}]} \mathbf{B}_{\text{cris}}(R_0) & \xrightarrow{\widehat{\Psi}_R} & \prod_{\mathfrak{p} \in T} \widehat{R}_{\mathfrak{p}}[p^{-1}] \otimes_{\widehat{R}_{0(p)}[p^{-1}]} \mathbf{B}_{\text{cris}}(\widehat{R}_{0(p)}) \end{array}$$

(on a $R[p^{-1}] \otimes_{R_0[p^{-1}]} \widehat{R}_{0(p)}[p^{-1}] = \widehat{R}_{(p)}[p^{-1}]$). D'après l'hypothèse (BR), le corps $\widehat{R}_{\mathfrak{p}}[p^{-1}]$ admet ϖ pour uniformisante, et l'extension résiduelle de $\widehat{R}_{\mathfrak{p}}[p^{-1}]/\widehat{R}_{0(p)}[p^{-1}]$ est triviale. D'après [10, Proposition 2.4.6], l'homomorphisme $f_{\widehat{R}_{\mathfrak{p}}}: \widehat{R}_{\mathfrak{p}}[p^{-1}] \otimes_{\widehat{R}_{0(p)}[p^{-1}]} \mathbf{B}_{\text{cris}}(\widehat{R}_{0(p)}) \rightarrow \mathbf{B}_{\text{dR}}(\widehat{R}_{\mathfrak{p}})$ est injectif. Il en est donc de même de $\widehat{R}_{0(p)}[p^{-1}] \otimes f_R$ et aussi de $R_0(p)[p^{-1}] \otimes f_R$ par fidèle platitude de $\widehat{R}_{0(p)}[p^{-1}]$ sur $R_0(p)[p^{-1}]$. D'après le corollaire 5.2.10, les éléments de $R_0 \setminus \{0\}$ ne sont pas diviseurs de zéro dans $\mathbf{B}_{\text{dR}}(R)$: comme $\mathbf{B}_{\text{cris}}(R_0)$ est un sous-anneau de ce dernier, l'homomorphisme de localisation $\mathbf{B}_{\text{cris}}(R_0) \rightarrow R_0(p)[p^{-1}] \otimes_{R_0[p^{-1}]} \mathbf{B}_{\text{cris}}(R_0)$ est injectif. L'anneau $R[p^{-1}]$ étant une $R_0[p^{-1}]$ -algèbre finie étale donc un $R_0[p^{-1}]$ -module projectif, l'application $R[p^{-1}] \otimes_{R_0[p^{-1}]} \mathbf{B}_{\text{cris}}(R_0) \rightarrow R_{(p)}[p^{-1}] \otimes_{R_0[p^{-1}]} \mathbf{B}_{\text{cris}}(R_0)$ est encore injective. L'injectivité de f_R résulte donc de la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} R[p^{-1}] \otimes_{R_0[p^{-1}]} \mathbf{B}_{\text{cris}}(R_0) & \xrightarrow{f_R} & \mathbf{B}_{\text{dR}}(R) \\ \downarrow & & \downarrow \\ R_{(p)}[p^{-1}] \otimes_{R_0[p^{-1}]} \mathbf{B}_{\text{cris}}(R_0) & \xrightarrow{R_0(p)[p^{-1}] \otimes f_R} & R_0(p)[p^{-1}] \otimes_{R_0[p^{-1}]} \mathbf{B}_{\text{dR}}(R) \end{array}$$

□

Remarque 6.2.8. — Dans la démonstration qui précède, la condition (BR) est seulement utilisée pour pouvoir utiliser [10, Proposition 2.4.6]. Il en résulte qu'elle pourrait être affaiblie en : pour tout idéal premier \mathfrak{p} de R contenant p , l'extension $\text{Frac}(\widetilde{R}/(\mathfrak{p} \cap \widetilde{R})) \rightarrow \text{Frac}(R/\mathfrak{p})$ est triviale.

Proposition 6.2.9. — Si la condition (BR) est vérifiée, alors $H^0(\mathcal{G}_R, \mathbf{B}_{\text{cris}}) = R_0[p^{-1}]$.

Démonstration. — D'après la proposition 6.2.7, l'homomorphisme $R[p^{-1}] \otimes_{R_0[p^{-1}]} \mathbf{B}_{\text{cris}} \rightarrow \mathbf{B}_{\text{dR}}$ est injectif. Comme $R[p^{-1}]$ est étale donc projectif sur $R_0[p^{-1}]$, on a $R[p^{-1}] \otimes_{R_0[p^{-1}]} H^0(\mathcal{G}_R, \mathbf{B}_{\text{cris}}) \subseteq H^0(\mathcal{G}_R, \mathbf{B}_{\text{dR}})$. Mais $H^0(\mathcal{G}_R, \mathbf{B}_{\text{dR}}) = R[p^{-1}]$ (proposition 5.2.12), on a donc $H^0(\mathcal{G}_R, \mathbf{B}_{\text{cris}}) \subseteq R_0[p^{-1}]$ par fidèle platitude de $R[p^{-1}]$ sur $R_0[p^{-1}]$. □

Corollaire 6.2.10. — Si la condition (BR) est vérifiée, alors $H^0(\mathcal{G}_R, \mathbf{B}_{\text{cris}}^{\nabla}) = W[p^{-1}]$.

Démonstration. — D'après le corollaire 6.2.4, on a $R_0[p^{-1}] \otimes_{W[p^{-1}]} H^0(\mathcal{G}_R, \mathbf{B}_{\text{cris}}^{\nabla}) \subseteq H^0(\mathcal{G}_R, \mathbf{B}_{\text{cris}})$. Comme $H^0(\mathcal{G}_R, \mathbf{B}_{\text{cris}}) = R_0[p^{-1}]$ d'après la proposition 6.2.9, on a donc $H^0(\mathcal{G}_R, \mathbf{B}_{\text{cris}}^{\nabla}) = W[p^{-1}]$. □

6.2.2. La suite exacte fondamentale. —

Ce qui suit est une adaptation détaillée de [27, II 5 (p. 89-101)].

On note $\Lambda_0 = \mathbf{Z}_p \{t, \langle \frac{t^{p-1}}{p} \rangle\}$ le séparé complété pour la topologie p -adique de l'enveloppe à puissances divisées de l'anneau $\mathbf{Z}_p [t, \frac{t^{p-1}}{p}]$ relativement à l'idéal engendré par $\frac{t^{p-1}}{p}$.

Si $m \in \mathbf{N}$, on pose $m = q(m)(p-1) + r(m)$ avec $q(m), r(m) \in \mathbf{N}$ et $0 \leq r(m) < p-1$.

On note $t^{\{m\}} = \left(\frac{t^{p-1}}{p}\right)^{[q(m)]} t^{r(m)} = \frac{t^m}{c(m)}$ avec $c(m) = p^{q(m)} q(m)!$. On a alors

$$\Lambda_0 = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{\{n\}}, a_n \in \mathbf{Z}_p, a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ pour la topologie } p\text{-adique} \right\}.$$

On a vu (cf. remarque 6.1.6) que $\frac{t^{p-1}}{p} \in \mathbf{A}_{\text{cris}}^{\nabla}$. L'anneau $\mathbf{A}_{\text{cris}}^{\nabla}$ étant séparé et complet pour la topologie p -adique, on a donc une inclusion $\Lambda_0 \subset \mathbf{A}_{\text{cris}}^{\nabla}$. On pose $\pi_{\varepsilon} = [\varepsilon] - 1 \in \mathbf{A}_{\text{cris}}^{\nabla}$.

Lemme 6.2.11. — On a $\pi_\varepsilon \in \Lambda_0$.

Démonstration. — Pour $m \in \mathbf{N}$, on a $t^{[m]} = \frac{c(m)}{m!} t^{\{m\}}$. Comme $[\varepsilon] = \exp(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c(m)}{m!} t^{\{m\}}$ dans A_{cris}^∇ , il s'agit de montrer que la suite $(\frac{c(m)}{m!})_{m \in \mathbf{N}}$ est à valeurs dans $\mathbf{Z}_{(p)}$ et tend vers 0.

Si $m \geq (p-1)(p-2)$, on a $q(m) \geq p-2$ d'où $r(m) \leq q(m)$. On a $\lfloor \frac{m}{p^{j+1}} \rfloor = \lfloor \frac{q(m)}{p^j} + \frac{r(m)-q(m)}{p^{j+1}} \rfloor \leq \lfloor \frac{q(m)}{p^j} \rfloor$ pour $j \geq 1$, donc

$$v\left(\frac{c(m)}{m!}\right) = q(m) + \sum_{j=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{q(m)}{p^j} \right\rfloor - \left(\left\lfloor \frac{m}{p} \right\rfloor + \sum_{j=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{m}{p^{j+1}} \right\rfloor \right) \geq q(m) - \left\lfloor \frac{m}{p} \right\rfloor = \frac{m}{p} - \left\lfloor \frac{m}{p} \right\rfloor + \frac{q(m)-r(m)}{p} \geq \frac{q(m)-r(m)}{p}.$$

Cela prouve que $\frac{c(m)}{m!} \in \mathbf{Z}_{(p)}$ si $m \geq (p-1)(p-2)$ et que la suite tend vers 0. Il reste à traiter le cas $m < (p-1)(p-2)$. On a alors $m < p^2$ d'où $v(m!) = \lfloor \frac{m}{p} \rfloor$ donc $v\left(\frac{c(m)}{m!}\right) = v(q(m)!) + q(m) - \lfloor \frac{m}{p} \rfloor \geq \lfloor \frac{m}{p-1} \rfloor - \lfloor \frac{m}{p} \rfloor \geq 0$. \square

Lemme 6.2.12. — On a $\Lambda_0 = \mathbf{Z}_p \{ \pi_\varepsilon, \langle \frac{\pi_\varepsilon^{p-1}}{p} \rangle \}$ (complété pour la topologie p -adique de l'enveloppe à puissances divisées de l'anneau $\mathbf{Z}_p [\pi_\varepsilon, \frac{\pi_\varepsilon^{p-1}}{p}]$ relativement à l'idéal engendré par $\frac{\pi_\varepsilon^{p-1}}{p}$).

Démonstration. — Rappelons (lemme 6.2.11) qu'on a $\pi_\varepsilon \in \Lambda_0$. En raisonnant dans $\mathbf{Q}_p[[t]]$, on a

$$\begin{aligned} t = \log([\varepsilon]) &= \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{\pi_\varepsilon^m}{m} = \pi_\varepsilon \sum_{s=0}^{\infty} \left(\sum_{q=0}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{p-1} (-1)^{p^s(pq+r)-1} \frac{\pi_\varepsilon^{p^s(pq+r)-1}}{p^s(pq+r)} \right) \right) \\ &= \pi_\varepsilon \sum_{s=0}^{\infty} \left(\sum_{q=0}^{\infty} \left((-1)^{qp-1} \frac{\pi_\varepsilon^{qp^{s+1}}}{p^s} \sum_{r=1}^{p-1} (-1)^{pr} \frac{\pi_\varepsilon^{(p^s-1)r+r-1}}{pq+r} \right) \right). \end{aligned}$$

Or on a

$$\frac{\pi_\varepsilon^{qp^{s+1}}}{p^s} = \frac{\pi_\varepsilon^q}{p^s} \pi_\varepsilon^{q(p^{s+1}-1)} = p^{q \frac{p^{s+1}-1}{p-1} - s} \pi_\varepsilon^q \left(\frac{\pi_\varepsilon^{p-1}}{p} \right)^{q \frac{p^{s+1}-1}{p-1}} = \left(q \frac{p^{s+1}-1}{p-1} \right)! p^{q \frac{p^{s+1}-1}{p-1} - s} \pi_\varepsilon^q \left(\frac{\pi_\varepsilon^{p-1}}{p} \right)^{q \frac{p^{s+1}-1}{p-1}}$$

et $\pi_\varepsilon^{p^s-1} = p^{\frac{p^s-1}{p-1}} \left(\frac{\pi_\varepsilon^{p-1}}{p} \right)^{\frac{p^s-1}{p-1}}$. L'élément t est donc égal à

$$\pi_\varepsilon \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} (-1)^{qp-1} \left(q \frac{p^{s+1}-1}{p-1} \right)! p^{q \frac{p^{s+1}-1}{p-1} + \frac{p^s-1}{p-1} - s} \pi_\varepsilon^q \left(\frac{\pi_\varepsilon^{p-1}}{p} \right)^{q \frac{p^{s+1}-1}{p-1}} \sum_{r=1}^{p-1} \frac{(-1)^{pr}}{pq+r} p^{\frac{p^s-1}{p-1}(r-1)} \left(\frac{\pi_\varepsilon^{p-1}}{p} \right)^{\frac{p^s-1}{p-1}r} \pi_\varepsilon^{r-1}.$$

Or $q \frac{p^{s+1}-1}{p-1} + \frac{p^s-1}{p-1} - s \geq q \frac{p^{s+1}-1}{p-1} \geq 0$ et tend vers l'infini si s ou q tend vers l'infini : on a donc $t = \pi_\varepsilon x$ avec $x \in \mathbf{Z}_p \{ \pi_\varepsilon, \langle \frac{\pi_\varepsilon^{p-1}}{p} \rangle \}$, en particulier $t^{\{m\}} = \pi_\varepsilon^{\{m\}} x^m$ et on peut définir un homomorphisme de \mathbf{Z}_p -algèbres $\Lambda_0 \rightarrow \mathbf{Z}_p \{ \pi_\varepsilon, \langle \frac{\pi_\varepsilon^{p-1}}{p} \rangle \}$.

Un calcul analogue montre que $\pi_\varepsilon = \exp(t) - 1 \in t\Lambda_0$ et permet de définir un homomorphisme de \mathbf{Z}_p -algèbres $\mathbf{Z}_p \{ \pi_\varepsilon, \langle \frac{\pi_\varepsilon^{p-1}}{p} \rangle \} \rightarrow \Lambda_0$, clairement inverse du précédent. \square

Rappelons ([27, 1.3.1]) que l'anneau $\mathcal{R}(\mathbf{Z}_p)$ est valué par $\mathfrak{v}(x) = v(x^{(0)})$. On a $\mathbf{Z}_p[[\pi_\varepsilon]] \subset W(\mathcal{R}(\mathbf{Z}_p)) \subset W(\mathcal{R})$ (car $\mathfrak{v}(\pi_\varepsilon) = \frac{p}{p-1}$), on en déduit un homomorphisme de W -algèbres

$$f: W(\mathcal{R}) \widehat{\otimes}_{\mathbf{Z}_p[[\pi_\varepsilon]]} \Lambda_0 \rightarrow A_{\text{cris}}^\nabla$$

(le chapeau signifiant qu'on a pris le séparé complété pour la topologie p -adique).

Proposition 6.2.13. — L'homomorphisme f est un isomorphisme.

Démonstration. — Comme A_{cris}^∇ est sans p -torsion et comme la source et le but sont séparés et complets pour la topologie p -adique, il suffit de vérifier que l'homomorphisme \bar{f} induit par f modulo p est un isomorphisme. D'après le lemme 6.2.12, on a $\Lambda_0 = \mathbf{Z}_p \{ \pi_\varepsilon, \langle \frac{\pi_\varepsilon^{p-1}}{p} \rangle \}$: la source de f est donc égale à $W(\mathcal{R}) \widehat{\otimes}_{\mathbf{Z}_p[[\pi_\varepsilon]]} \mathbf{Z}_p \{ \pi_\varepsilon, \langle \frac{\pi_\varepsilon^{p-1}}{p} \rangle \}$ (produit tensoriel complété), donc isomorphe, modulo p , à

$$\mathcal{R} \otimes_{\mathbf{F}_p[[\pi_\varepsilon]]} \mathbf{F}_p[[\pi_\varepsilon]] / (\overline{\pi_\varepsilon^{p-1}}) [\lambda_0, \lambda_1, \dots] / (\lambda_n^p)_{n \in \mathbf{N}} \simeq \mathcal{R} / (\overline{\pi_\varepsilon^{p-1}}) [\lambda_0, \lambda_1, \dots] / (\lambda_n^p)_{n \in \mathbf{N}}$$

où λ_n est l'image de l'élément $\gamma^n \left(\frac{\pi_\varepsilon^{p-1}}{p} \right)$ (où γ désigne l'application $x \mapsto \frac{x^p}{p}$), et où on note avec une barre l'image d'un élément modulo p (cf. preuve de la proposition 6.1.2).

D'après [27, II 5.1.2], on a $\pi_\varepsilon = \lambda\xi$ dans $W(\mathcal{R}(\mathbf{Z}_p))$ avec $\mathfrak{v}(\lambda) = \frac{1}{p-1}$ et donc $\pi_\varepsilon^{p-1} = \lambda^{p-1} \xi^{p-1} = u\xi^p$ avec $\mathfrak{v}(u) = 0$, et donc $u \in W(\mathcal{R}(\mathbf{Z}_p))^\times$. Il en résulte que la source de \bar{f} n'est autre que $\mathcal{R} / (\overline{\xi^p}) [\delta_0, \delta_1, \dots] / (\delta_n^p)_{n \in \mathbf{N}}$ où δ_n désigne l'image de $\gamma^{n+1}(\xi)$. D'après le corollaire 6.1.3, \bar{f} est bien un isomorphisme. \square

Soit $r \in \mathbf{N}_{>0}$. On pose

- $I^{[r]} A_{\text{cris}}^{\nabla} = \{a \in A_{\text{cris}}^{\nabla}, (\forall n \in \mathbf{N}) \varphi^n(a) \in \text{Fil}^r A_{\text{cris}}^{\nabla}\}$ (où $\text{Fil}^r A_{\text{cris}}^{\nabla} = A_{\text{cris}}^{\nabla} \cap \text{Fil}^r B_{\text{cris}}^{\nabla}$);
 - $I^{(r)} A_{\text{cris}}^{\nabla} = \text{adhérence pour la topologie } p\text{-adique dans } A_{\text{cris}}^{\nabla} \text{ du sous-} W(\mathcal{R})\text{-module engendré par } \{t^{\{m\}}\}_{m \geq r}$.
- Rappelons que d'après [27, II 5.1.2], on a $\xi W(\mathcal{R}(\mathbf{Z}_p)) = \frac{\pi_\varepsilon}{\varphi^{-1}(\pi_\varepsilon)} W(\mathcal{R}(\mathbf{Z}_p)) = \text{Ker}(\theta)$.

Lemme 6.2.14. — Si $a \in W(\mathcal{R})$, on a $(\forall n \in \mathbf{N}) \theta(\varphi^n(a)) = 0 \Leftrightarrow a \in \pi_\varepsilon W(\mathcal{R})$.

Démonstration. — Soit

$$\begin{aligned} \rho: W(\mathcal{R}) &\longrightarrow \widehat{R}^{\mathbf{N}} \\ a &\longmapsto (\theta(\varphi^n(a)))_{n \in \mathbf{N}}. \end{aligned}$$

On a $\pi_\varepsilon \in \text{Ker}(\rho)$ car $\varphi^n(\pi_\varepsilon) = [\varepsilon^{p^n}] - 1 = [\varepsilon]^{p^n} - 1$ et $\theta(\varphi^n(\pi_\varepsilon)) = 0$. Montrons que $\text{Ker}(\rho) = \pi_\varepsilon W(\mathcal{R})$.

Comme $W(\mathcal{R})$ est séparé et complet pour la topologie p -adique et \widehat{R} sans p -torsion, il suffit de voir que $\text{Ker}(\rho) \subset (\pi_\varepsilon, p) W(\mathcal{R}) = ([\varepsilon - 1], p) W(\mathcal{R})$ (on a $\pi_\varepsilon = [\varepsilon] - 1 \equiv [\varepsilon - 1] \pmod{p} W(\mathcal{R})$).

Soit $a = (a_0, a_1, \dots) \in \text{Ker}(\rho)$. On a déjà $a \in \text{Ker}(\theta)$, donc $a = \frac{\pi_\varepsilon}{\varphi^{-1}(\pi_\varepsilon)} x_1$ avec $x_1 \in W(\mathcal{R})$. On a alors $\varphi(a) = \frac{\varphi(\pi_\varepsilon)}{\pi_\varepsilon} \varphi(x_1)$. Comme $\varphi(\pi_\varepsilon) = (1 + [\varepsilon] - 1)^p - 1 \equiv \sum_{j=1}^p \binom{p}{j} ([\varepsilon] - 1)^j = p([\varepsilon] - 1) \pmod{([\varepsilon] - 1)^2} W(\mathcal{R})$.

On a donc $\theta(\frac{\varphi(\pi_\varepsilon)}{\pi_\varepsilon}) = p$. Comme $\theta(\varphi(a)) = 0$, on a $\theta(\varphi(x_1)) = 0$ d'où $x_1 \in \frac{\varphi^{-1}(\pi_\varepsilon)}{\varphi^{-2}(\pi_\varepsilon)} W(\mathcal{R})$. Ainsi $a = \frac{\pi_\varepsilon}{\varphi^{-2}(\pi_\varepsilon)} x_2$ avec $x_2 \in W(\mathcal{R})$. En itérant ce qui précède, on en déduit que pour tout $n \in \mathbf{N}_{>0}$, il existe $x_n \in W(\mathcal{R})$ tel que $a = \frac{\pi_\varepsilon}{\varphi^{-n}(\pi_\varepsilon)} x_n$. Modulo p , cela donne $a_0 = \frac{\varepsilon - 1}{\varphi^{-n}(\varepsilon) - 1} \bar{x}_n$. Ainsi, $\varepsilon - 1$ divise a_0 dans \mathcal{R} (cela se vérifie en regardant les relèvements multiplicatifs dans \widehat{R} , en faisant tendre n vers l'infini : pour tout $m \in \mathbf{N}$, la suite $(\bar{x}_n^{(m)})_{n \in \mathbf{N}_{>0}}$ converge pour la topologie p -adique). \square

Lemme 6.2.15. — Si $x \in A_{\text{cris}}^{\nabla}$ est tel que $(\forall n \in \mathbf{N}) \theta(\varphi^n(x)) = 0$, alors $x \in I^{(1)} A_{\text{cris}}^{\nabla}$ et $\varphi(x) \in t A_{\text{cris}}^{\nabla}$.

Démonstration. — D'après la proposition 6.2.13, on a une écriture (non unique) $x = \sum_{m=0}^{\infty} x_m t^{\{m\}}$ avec $x_m \in W(\mathcal{R})$. On a $\varphi^n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \varphi^n(x_m) p^{nm} t^{\{m\}}$. Comme $\theta(t^{\{m\}}) = 0$ pour tout $m \in \mathbf{N}$, on a $\theta(\varphi^n(x)) = \theta(\varphi^n(x_0))$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. D'après le lemme 6.2.14, il existe $y_0 \in \pi_\varepsilon W(\mathcal{R})$ tel que $x_0 = \pi_\varepsilon y_0$. Comme $\pi_\varepsilon = \exp(t) - 1 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c(m)}{m!} t^{\{m\}}$, on a $x = \sum_{m=1}^{\infty} (\frac{c(m)}{m!} y_0 + x_m) t^{\{m\}}$: on peut supposer $x_0 = 0$ et donc $x \in I^{(1)} A_{\text{cris}}^{\nabla}$.

On a alors $\varphi(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \varphi(x_m) p^m t^{\{m\}} = t \left(\sum_{m=1}^{\infty} \varphi(x_m) p^m \frac{c(m-1)}{c(m)} t^{\{m-1\}} \right)$. Comme on a $c(m) = c(m-1)$ ou $c(m) = pq(m)c(m-1)$ suivant que $q(m) = q(m-1)$ ou $q(m) = q(m-1) + 1$, on a $v\left(p^m \frac{c(m-1)}{c(m)}\right) \geq m - v(q(m)) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \infty$ et donc $\varphi(x) \in t A_{\text{cris}}^{\nabla}$. \square

Proposition 6.2.16. — Pour tout $r \geq 1$, on a $I^{(r)} A_{\text{cris}}^{\nabla} = I^{[r]} A_{\text{cris}}^{\nabla}$.

Démonstration. — L'inclusion est évidente. On procède par récurrence sur r , le cas $r = 1$ n'étant autre que le lemme 6.2.15. Supposons donc le cas $r - 1$ connu. Soit $x \in I^{[r]} A_{\text{cris}}^{\nabla}$. Comme $\text{Fil}^r A_{\text{cris}}^{\nabla} \subset \text{Fil}^{r-1} A_{\text{cris}}^{\nabla}$, on a déjà $x \in I^{(r-1)} A_{\text{cris}}^{\nabla}$: on peut donc écrire $x = x_{r-1} t^{\{r-1\}} + \sum_{m=r}^{\infty} x_m t^{\{m\}}$. Si $n \in \mathbf{N}$, on a alors

$$\varphi^n(x) = \varphi^n(x_{r-1}) p^{n(r-1)} t^{\{r-1\}} + \sum_{m=r}^{\infty} \varphi^n(x_m) p^{nm} t^{\{m\}}.$$

Comme $\sum_{m=r}^{\infty} \varphi^n(x_m) p^{nm} t^{\{m\}} \in \text{Fil}^r A_{\text{cris}}^{\nabla}$, on a $\varphi^n(x_{r-1}) p^{n(r-1)} t^{\{r-1\}} \in \text{Fil}^r A_{\text{cris}}^{\nabla}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Comme $p^{n(r-1)} t^{\{r-1\}} \in \text{Fil}^{r-1} A_{\text{cris}}^{\nabla} \setminus \text{Fil}^r A_{\text{cris}}^{\nabla}$, on a donc $\varphi^n(x_{r-1}) \in \text{Fil}^1 A_{\text{cris}}^{\nabla}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, et d'après le lemme 6.2.15, on a $x_{r-1} \in I^{(1)} A_{\text{cris}}^{\nabla}$. Le résultat découle alors de $t^{\{r-1\}} I^{(1)} A_{\text{cris}}^{\nabla} \subset I^{(r)} A_{\text{cris}}^{\nabla}$. \square

Proposition 6.2.17. — Soit $B_{\text{cris}}^{\nabla'} = \{x \in B_{\text{cris}}^{\nabla}, (\forall n \in \mathbf{N}) \varphi^n(x) \in B_{\text{dr}}^{\nabla+}\}$ alors on a $\varphi(B_{\text{cris}}^{\nabla'}) \subset B_{\text{cris}}^{\nabla+} \subset B_{\text{cris}}^{\nabla'}$.

Démonstration. — Si $x \in B_{\text{cris}}^{\nabla}$, on a $x = \frac{1}{t^r p^s} y$ avec $y \in A_{\text{cris}}^{\nabla}$ et $r \in \mathbf{N}$. Si pour tout entier n , $\varphi^n(x) \in B_{\text{dr}}^{\nabla+}$, alors $\varphi^n(y) \in \text{Fil}^r B_{\text{dr}}^{\nabla+}$ pour tout n i.e. $y \in I^{[r]} A_{\text{cris}}^{\nabla}$ et d'après la proposition 6.2.16, $y \in I^{(r)} A_{\text{cris}}^{\nabla}$: on peut écrire $y = \sum_{m=r}^{\infty} y_m t^{\{m\}}$ i.e. $x = \sum_{m=r}^{\infty} \frac{y_m}{p^s} t^{\{m\}} - r = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{y_{m+r}}{p^s} \frac{c(m)}{c(m+r)} t^{\{m\}}$. On a alors $\varphi(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \varphi(y_{m+r}) p^{m-s} \frac{c(m)}{c(m+r)} t^{\{m\}}$. Pour voir que $\varphi(x) \in B_{\text{cris}}^{\nabla+}$, il suffit donc de voir que la suite $(p^m \frac{c(m)}{c(m+r)})_{m \in \mathbf{N}}$ est bornée pour la topologie p -adique.

On a $p^m \frac{c(m)}{c(m+r)} = p^{m+q(m)-q(m+r)} \frac{q(m)!}{q(m+r)!}$. Comme $\frac{q(m+r)!}{q(m)!} = (q(m+r) - q(m))! \binom{q(m+r)}{q(m)}$ et $0 \leq q(m+r) - q(m) = \lfloor \frac{m+r}{p-1} \rfloor - \lfloor \frac{m}{p-1} \rfloor \leq \lfloor \frac{r}{p-1} \rfloor + 1$, on a $\frac{q(m+r)!}{q(m)!} \leq (\lfloor \frac{r}{p-1} \rfloor + 1)! 2^{q(m+r)}$ et donc $v(p^m \frac{c(m)}{c(m+r)}) \geq m + q(m) - q(m+r) - \frac{\log((\lfloor \frac{r}{p-1} \rfloor + 1)!)}{\log(p)} - q(m+r) \frac{\log(2)}{\log(p)}$ et donc $v(p^m \frac{c(m)}{c(m+r)}) \geq m(1 - \frac{\log(2)}{(p-1)\log(p)}) + O(1)$, ce qui permet de conclure. \square

L'inclusion $\mathbf{Z}_p \subset W \subset \overline{R}$ donne lieu à une inclusion $\mathbf{F}_p \subset \overline{R}/p\overline{R}$.

Lemme 6.2.18. — On a $(\overline{R}/p\overline{R})^{\varphi=1} = \mathbf{F}_p$ et donc $\mathcal{R}^{\varphi=1} = \mathbf{F}_p$.

Démonstration. — Soit $x \in (\overline{R}/p\overline{R})^{\varphi=1}$. Il existe une sous- \tilde{R} -algèbre finie S de \overline{R} telle que $x \in S/pS \subset \overline{R}/p\overline{R}$. Comme S est fini sur \tilde{R} qui est complet pour la topologie p -adique, S est complet pour la topologie p -adique : le couple (S, pS) est donc hensélien. L'élément x est racine du polynôme $X^p - X$, dont la dérivée en x est $1 \in S/pS$: il se relève de façon unique en $\hat{x} \in S$ tel que $\hat{x}^p = \hat{x}$. Mais S étant intègre, le polynôme $X^p - X$ a au plus p racines dans S , qui sont précisément 0 et les racines $p-1$ -ièmes de l'unité de $\mathbf{Z}_p \subseteq W$: on a $\hat{x} \in \mathbf{Z}_p$ i.e. $x \in \mathbf{F}_p \subset S/pS$.

Si $x = (x_0, x_1, \dots) \in \mathcal{R}^{\varphi=1}$, on a $x_n^p = x_n$ dans $\overline{R}/p\overline{R}$ i.e. $x_n \in \mathbf{F}_p$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Comme $x_{n+1} = x_{n+1}^p = x_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, il existe donc $\alpha \in \mathbf{F}_p$ tel que $x = (\alpha, \alpha, \dots) \in \mathbf{F}_p \subset \mathcal{R}$. \square

Corollaire 6.2.19. — On a $\{x \in B_{\text{cris}}^{\nabla}, \varphi(x) = x \text{ et } x \in B_{\text{dR}}^{\nabla+}\} = \mathbf{Q}_p$.

Démonstration. — L'inclusion $\mathbf{Q}_p \subseteq \{x \in B_{\text{cris}}^{\nabla}, \varphi(x) = x \text{ et } x \in B_{\text{dR}}^{\nabla+}\}$ est évidente. Réciproquement, si $x \in B_{\text{cris}}^{\nabla}$ est tel que $\varphi(x) = x$ et $x \in B_{\text{dR}}^{\nabla+}$, alors $x \in B_{\text{cris}}^{\nabla'}$ et donc $x = \varphi(x) \in B_{\text{cris}}^{\nabla+}$ d'après la proposition 6.2.17. Quitte à multiplier x par une puissance de p convenable, on peut supposer que $x \in A_{\text{cris}}^{\nabla}$ s'écrit $x = \sum_{m=0}^{\infty} x_m t^{\{m\}}$, avec $x_m \in W(\mathcal{R})$. On a $x = \varphi^n(x) = \varphi^n(x_0) + \sum_{m=1}^{\infty} \varphi^n(x_m) p^{nm} t^{\{m\}}$ et donc $x \in \bigcap_{n \in \mathbf{N}} (W(\mathcal{R}) + p^n A_{\text{cris}}^{\nabla}) = W(\mathcal{R})$. On peut donc écrire $x = (a_0, a_1, \dots) \in W(\mathcal{R})$. Comme $\varphi(x) = (a_0^p, a_1^p, \dots)$, on a $a_n^p = a_n$ dans \mathcal{R} i.e. $a_n \in \mathbf{F}_p$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ (cf. lemme 6.2.18). On a bien $x \in \mathbf{Q}_p$. \square

On note $U_1^{\times}(\widehat{R}) = \{x \in \mathcal{R}, x^{(0)} \in 1 + 2p\widehat{R}\}$, c'est un sous-groupe du groupe des éléments inversibles de \mathcal{R} . Il est séparé et complet pour la topologie p -adique, ce qui permet de le considérer comme un \mathbf{Z}_p -module. Comme $(x^\lambda)^{(0)} = (x^{(0)})^\lambda$ pour $\lambda \in \mathbf{Z}_p$ et $x \in U_1^{\times}(\widehat{R})$, ce module est sans torsion.

On note alors $U^{\times}(\widehat{R}) = \{x \in \mathcal{R}, (\exists r \in \mathbf{N}) (x^{(0)})^{p^r} \in 1 + 2p\widehat{R}\} = \{x \in \mathcal{R}, (\exists r \in \mathbf{N}) x^{p^r} \in U_1^{\times}(\widehat{R})\}$. C'est un sous-groupe de \mathcal{R}^{\times} . C'est aussi un \mathbf{Q}_p -espace vectoriel et on a $\mathbf{Q}_p \otimes_{\mathbf{Z}_p} U_1^{\times}(\widehat{R}) \xrightarrow{\sim} U^{\times}(\widehat{R})$

Rappelons qu'on a choisi $\tilde{p} = (p^{(n)})_{n \in \mathbf{N}}$ une suite cohérente de racines p^n -ièmes de p (i.e. $p^{(0)} = p$ et $(p^{(n+1)})^p = p^{(n)}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$).

Si $\alpha \in \widehat{R}$, $r \in \mathbf{N}$ et $x = 1 + p^{(r+1)}\alpha$, on a $x^p = (1 + p^{(r+1)}\alpha)^p = 1 + p^{(r)}\alpha^p + \sum_{j=1}^{p-1} \binom{p}{j} (p^{(r+1)}\alpha)^j \in 1 + p^{(r)}\widehat{R}$.

L'application

$$f_r: 1 + p^{(r+1)}\widehat{R} \longrightarrow 1 + p^{(r)}\widehat{R} \\ x \longmapsto x^p$$

est donc bien définie.

Lemme 6.2.20. — Pour tout $r \in \mathbf{N}$, l'application f_r est surjective.

Démonstration. — Soit $y = 1 + p^{(r)}\alpha \in 1 + p^{(r)}\widehat{R}$. Posons

$$P_\alpha(X) = \frac{1}{p^{(r)}} ((1 + p^{(r+1)}X)^p - (1 + p^{(r)}\alpha)) \in \overline{R}[p^{-1}][X].$$

On a

$$P_\alpha(X) = \frac{1}{p^{(r)}} \left(1 + p^{(r)}X^p + \sum_{j=1}^{p-1} \binom{p}{j} (p^{(r+1)}X)^j - (1 + p^{(r)}\alpha) \right) = X^p + \sum_{j=1}^{p-1} (p^{(r)})^{p^r-1} \frac{1}{p} \binom{p}{j} (p^{(r+1)}X)^j - \alpha.$$

Le polynôme P_α est donc unitaire à coefficients dans \overline{R} . Soit S une R -algèbre finie normale contenant α telle que $S[p^{-1}]$ est étale sur $R[p^{-1}]$. Si λ est une racine de P_α dans une clôture algébrique de $\text{Frac}(\overline{R})$, on a

$$\begin{aligned} P'_\alpha(\lambda) &= p\lambda^{p-1} + \sum_{j=1}^{p-1} (p^{(r)})^{p-1} \frac{j}{p} \binom{p}{j} (p^{(r+1)})^j \lambda^{j-1} \\ &= \frac{pp^{(r+1)}}{p^{(r)}} \left(1 + (p^{(r+1)})^{p-1} \lambda^{p-1} + \sum_{j=2}^{p-1} (p^{(r)})^{p-1} \frac{j}{p} \binom{p}{j} (p^{(r+1)})^{j-1} \lambda^{j-1} \right) \end{aligned}$$

donc $P'_\alpha(\lambda) \in \frac{pp^{(r+1)}}{p^{(r)}} (1 + p^{(r+1)} S[\lambda]) \subseteq (S[\lambda, p^{-1}])^\times$. On a donc $\lambda \in \overline{R}[p^{-1}]$. Comme λ est entier sur S , on a en fait $\lambda \in \overline{R}$. Par ailleurs, on a $f_r(1 + p^{(r+1)}\lambda) = 1 + p^{(r)}\alpha$ vu que $P_\alpha(\lambda) = 0$.

En particulier, l'application f_r est surjective modulo p^3 (remarque : la surjectivité modulo p est une conséquence immédiate de la proposition 2.0.1).

Fixons maintenant $y \in 1 + p^{(r)}\widehat{R}$. D'après ce qui précède, il existe $x_3 \in 1 + p^{(r+1)}\overline{R}$ et $z_3 \in \widehat{R}$ tels que $f_r(x_3) = y + p^3 z_3$. Soit $n \geq 3$. Supposons construits $x_3, \dots, x_n \in 1 + p^{(r+1)}\overline{R}$ et $z_3, \dots, z_n \in \widehat{R}$ tels que $f_r(x_j) = y + p^j z_j$ pour tout $j \in \{3, \dots, n\}$ et $x_{j+1} - x_j \in p^j \widehat{R}$ pour tout $j \in \{3, \dots, n-1\}$. Si $\eta \in \overline{R}$, on a

$$\begin{aligned} f_r(x_n + p^n \eta) &= (x_n + p^n \eta)^p = f_r(x_n) + p^n \eta x_n^{p-1} + \sum_{m=2}^p \binom{p}{m} p^{m(n-1)} \eta^m x_n^{p-m} \\ &= y + p^n (z_n + \eta x_n^{p-1}) + \sum_{m=2}^p \binom{p}{m} p^{m(n-1)} \eta^m x_n^{p-m}. \end{aligned}$$

Comme $m \geq 3$, on a $p(n-1) \geq 2(n-1) \geq n+1$ et $1+m(n-1) \geq 1+2(n-1) \geq n+1$ pour $m \in \{2, \dots, p-1\}$. On a donc $f_r(x_n + p^n \eta) \equiv y + p^n (z_n + \eta x_n^{p-1}) \pmod{p^{n+1} \widehat{R}}$. Comme $x_n \in 1 + p^{(r+1)}\overline{R}$, l'élément x_n est inversible dans \overline{R} : choisissons $\eta_n \in \overline{R}$ congru à $-x_n^{-(p-1)} z_n$ modulo $p \widehat{R}$, et posons $x_{n+1} = x_n + p^n \eta_n$. On a bien $x_{n+1} \in 1 + p^{(r+1)}\overline{R}$ et $x_{n+1} - x_n \in p^n \overline{R}$. Par ailleurs, on a $f_r(x_{n+1}) \equiv y + p^n (z_n + \eta_n x_n^{p-1}) \pmod{p^{n+1} \widehat{R}}$ i.e. $f_r(x_{n+1}) \equiv y \pmod{p^{n+1} \widehat{R}}$.

On construit ainsi des suites $(x_n)_{n \geq 3}$ et $(z_n)_{n \geq 3}$ d'éléments de $1 + p^{(r+1)}\overline{R}$ et de \widehat{R} respectivement. La suite $(x_n)_{n \geq 3}$ est de Cauchy pour la topologie p -adique, notons x sa limite dans $1 + p^{(r+1)}\widehat{R}$. En passant à la limite dans l'égalité $f_r(x_n) = y + p^n z_n$, on a $f_r(x) = y$, d'où la surjectivité. \square

On a un logarithme

$$\begin{aligned} \log: U_1^\times(\widehat{R}) &\longrightarrow A_{\text{cris}}^\nabla \\ x &\longmapsto \log[x] = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (n-1)! ([x] - 1)^{[n]}. \end{aligned}$$

La série converge dans A_{cris}^∇ car si $x^{(0)} \in 1 + 2p\widehat{R}$, on a $[x] - 1 \in 2p \mathcal{W}(\mathcal{R})$ et donc $([x] - 1)^{[n]} \in A_{\text{cris}}^\nabla$ pour $n \in \mathbf{N}_{>0}$. On prolonge l'application ainsi construite en $\log: U^\times(\widehat{R}) \rightarrow B_{\text{cris}}^{\nabla+}$ en posant $\log[x] = p^{-r} \log[x^{p^r}]$ pour $x \in U^\times(\widehat{R})$, avec $r \in \mathbf{N}$ assez grand.

Lemme 6.2.21. — *L'image de l'application composée*

$$\begin{aligned} U_1^\times(\widehat{R}) &\longrightarrow A_{\text{cris}}^\nabla \xrightarrow{\theta} \widehat{R} \\ x &\longmapsto \log[x] \end{aligned}$$

contient $2p\widehat{R}$.

Démonstration. — Le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} U_1^\times(\widehat{R}) & \longrightarrow & 1 + 2p\widehat{R} \\ \log \downarrow & & \downarrow \log \\ A_{\text{cris}}^\nabla & \xrightarrow{\theta} & \widehat{R} \end{array}$$

(car $\theta([x]) = x^{(0)}$ si $x \in \mathcal{R}$). La flèche $U_1^\times(\widehat{R}) \longrightarrow 1 + 2p\widehat{R}$ étant surjective d'après le lemme 6.2.20, il suffit de voir que l'image de l'application $\log: 1 + 2p\widehat{R} \longrightarrow \widehat{R}$ contient $2p\widehat{R}$, ce qui résulte de ce que, pour tout $a \in \widehat{R}$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2pa)^n}{n!}$ converge dans $1 + 2p\widehat{R}$. \square

On en déduit que l'application composée $U^\times(\widehat{R}) \rightarrow B_{\text{cris}}^{\nabla+} \xrightarrow{\theta} C$ est surjective. Pour $n \in \mathbf{N}_{>0}$, posons

$$U_n = \{x \in B_{\text{cris}}^{\nabla} \cap B_{\text{dR}}^{\nabla+}, \varphi(x) = p^n x\} \subset B_{\text{dR}}^{\nabla+}.$$

On a des applications $g_n: U_n \rightarrow B_{\text{dR}}^{\nabla+} / \text{Fil}^n(B_{\text{dR}}^{\nabla+})$. Si $x \in U_n$, on écrit $x = yt^n$ avec $y \in B_{\text{cris}}^{\nabla}$ et alors $\varphi(y) = y$. On a $x \in \text{Ker}(g_n) \Leftrightarrow x \in \text{Fil}^n B_{\text{dR}}^{\nabla+} \Leftrightarrow y \in B_{\text{dR}}^{\nabla+}$. D'après le corollaire 6.2.19, on a donc $\text{Ker}(g_n) = \mathbf{Q}_p t^n = \mathbf{Q}_p(n)$ d'où une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathbf{Q}_p(n) \rightarrow U_n \xrightarrow{g_n} B_{\text{dR}}^{\nabla+} / \text{Fil}^n B_{\text{dR}}^{\nabla+}.$$

Lemme 6.2.22. — Si $n \geq 1$, la suite $0 \rightarrow \mathbf{Q}_p(n) \rightarrow U_n \xrightarrow{g_n} B_{\text{dR}}^{\nabla+} / \text{Fil}^n B_{\text{dR}}^{\nabla+} \rightarrow 0$ est exacte.

Démonstration. — D'après ce qui précède, il s'agit de voir la surjectivité de g_n .

• Cas $n = 1$: Soit $U = \{\log[a], a \in U^\times(\widehat{R})\} \subset B_{\text{cris}}^{\nabla+}$.

Comme $\varphi([a]) = [a]^p$, on a $\varphi(\log[a]) = p[a]$ et donc $U \subseteq U_1$. D'après le lemme 6.2.21, on a

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbf{Q}_p(1) & \longrightarrow & U & \xrightarrow{\theta} & C \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & \mathbf{Q}_p(1) & \longrightarrow & U_1 & \xrightarrow{g_1} & C \end{array}$$

et donc $U = U_1$ et $U_1 \rightarrow B_{\text{dR}}^{\nabla+} / \text{Fil}^1 B_{\text{dR}}^{\nabla+} = C$ est surjective.

• Cas général : on a le diagramme à lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & U_{n-1} & \xrightarrow{.t} & U_n & \longrightarrow & U_n/tU_{n-1} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow g_{n-1} & & \downarrow g_n & & \downarrow (*) & & \\ 0 & \longrightarrow & B_{\text{dR}}^{\nabla+} / \text{Fil}^{n-1} B_{\text{dR}}^{\nabla+} & \xrightarrow{.t} & B_{\text{dR}}^{\nabla+} / \text{Fil}^n B_{\text{dR}}^{\nabla+} & \longrightarrow & \text{Gr}^0 B_{\text{dR}}^{\nabla+} = C & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Comme $U \xrightarrow{\theta} C$ est surjective, choisissons $v \in U$ tel que $\theta(v) = 1$. La flèche composée

$$\begin{array}{c} U \longrightarrow U_n \longrightarrow U_n/tU_{n-1} \xrightarrow{(*)} C \\ x \longmapsto xv^{n-1} \end{array}$$

n'est autre que l'application θ . Sa surjectivité prouve celle de $(*)$ (qui est en fait une bijection). On en déduit que si g_{n-1} est surjective, alors g_n aussi. \square

Proposition 6.2.23. — La suite $0 \rightarrow \mathbf{Q}_p \rightarrow (B_{\text{cris}}^{\nabla})^{\varphi=1} \rightarrow B_{\text{dR}}^{\nabla} / B_{\text{dR}}^{\nabla+} \rightarrow 0$ est exacte.

Démonstration. — En tordant la suite exacte du lemme 6.2.22 $-n$ fois à la Tate, on a la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathbf{Q}_p \rightarrow U_n t^{-n} \rightarrow t^{-n} B_{\text{dR}}^{\nabla+} / B_{\text{dR}}^{\nabla+} \rightarrow 0.$$

Comme $(B_{\text{cris}}^{\nabla})^{\varphi=1} = \varinjlim_n U_n t^{-n}$, le passage à la limite inductive donne le résultat recherché. \square

La suite exacte précédent s'écrit aussi $0 \rightarrow \mathbf{Q}_p \rightarrow B_{\text{cris}}^{\varphi=1, \nabla=0} \rightarrow B_{\text{dR}}^{\nabla=0} / (\text{Fil}^0 B_{\text{dR}})^{\nabla=0} \rightarrow 0$.

6.3. Platitude

Dans ce numéro, on reprend les notations de la section 3.2 et le langage de la section 9.2. On note \mathcal{I} l'idéal de A_{cris} engendré par $(\varphi^{-n}([\varepsilon] - 1))_{n \in \mathbf{N}_{>0}}$ et $\{[x], x \in \mathcal{R}, x^{(0)} \in \mathfrak{m}_{\widehat{R}}\}$.

Lemme 6.3.1. — Pour tout $n \in \mathbf{N}_{>0}$, on a $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{I}^2 + p^n A_{\text{cris}}$.

Démonstration. — Comme $\mathfrak{m}_{\widehat{R}}^2 = \mathfrak{m}_{\widehat{R}}$, on a $[x] \in \mathcal{I}^2$ pour $x \in \mathcal{R}$ tel que $x^{(0)} \in \mathfrak{m}_{\widehat{R}}$. Soit $m \in \mathbf{N}_{>0}$. On a

$$\begin{aligned} [\varepsilon]^{p^{-m}} - 1 &= ([\varepsilon]^{p^{-(m+n)}} - 1) \sum_{j=0}^{p^n-1} [\varepsilon]^{jp^{-(m+n)}} = ([\varepsilon]^{p^{-(m+n)}} - 1) \left(p^n + \sum_{j=1}^{p^n-1} [\varepsilon]^{jp^{-(m+n)}} - 1 \right) \\ &= p^n ([\varepsilon]^{p^{-(m+n)}} - 1) + ([\varepsilon]^{p^{-(m+n)}} - 1)^2 \sum_{j=0}^{p^n-1} \sum_{k=0}^{j-1} [\varepsilon]^{kp^{-(m+n)}} \end{aligned}$$

donc $[\varepsilon]^{p^{-m}} - 1 \in ([\varepsilon]^{p^{-(m+n)}} - 1)^2 A_{\text{cris}} + p^n A_{\text{cris}} \subseteq \mathcal{I}^2 + p^n A_{\text{cris}}$. \square

Lemme 6.3.2. — Pour tout $M \in \text{Mod}(R_0/pR_0)$, le \widehat{R} -module $\text{Tor}_1^{R_0/pR_0}(\widehat{R}/p\widehat{R}, M)$ est tué par $\mathfrak{m}_{\widehat{R}}$.

Démonstration. — Si $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ est une suite exacte dans $\mathbf{Mod}(R_0/pR_0)$, on a la suite exacte $\mathrm{Tor}_1^{R_0}(\overline{R}, M'') \rightarrow \overline{R} \otimes_{R_0} M' \rightarrow \overline{R} \otimes_{R_0} M$. D'après la proposition 3.2.1, le \overline{R} -module $\mathrm{Tor}_1^{R_0}(\overline{R}, M'')$ est tué par $\mathfrak{m}_{\overline{R}}$. Comme $\overline{R} \otimes_{R_0} M' = (\overline{R}/p\overline{R}) \otimes_{R_0/pR_0} M'$ et $\overline{R} \otimes_{R_0} M = (\overline{R}/p\overline{R}) \otimes_{R_0/pR_0} M$, le noyau de $(\overline{R}/p\overline{R}) \otimes_{R_0/pR_0} M' \rightarrow (\overline{R}/p\overline{R}) \otimes_{R_0/pR_0} M$ est donc tué par $\mathfrak{m}_{\overline{R}}$. \square

Lemme 6.3.3. — *Pour tout $M \in \mathbf{Mod}(R_0/pR_0)$, le A_{cris} -module $\mathrm{Tor}_1^{R_0/pR_0}(A_{\mathrm{cris}}/pA_{\mathrm{cris}}, M)$ est tué par \mathcal{I} .*

Démonstration. — Rappelons (corollaire 6.1.9), que $A_{\mathrm{cris}}/pA_{\mathrm{cris}}$ est isomorphe à

$$(\mathcal{R}/\tilde{p}^p\mathcal{R})[u_1, \dots, u_d, \delta_0, \delta_1, \dots, X_{i,0}, X_{i,1}, \dots] / (T_i^p - \tilde{T}_i^p, \delta_m^p, X_{i,m}^p)_{\substack{1 \leq i \leq d \\ m \in \mathbf{N}}}$$

La structure de R_0 -module se factorise par $\mathcal{A} = (\mathcal{R}/\tilde{p}^p\mathcal{R})[u_1, \dots, u_d] / (T_i^p - \tilde{T}_i^p)_{1 \leq i \leq d}$, et $A_{\mathrm{cris}}/pA_{\mathrm{cris}}$ est libre sur \mathcal{A} : il s'agit de montrer que $\mathrm{Tor}_1^{R_0/pR_0}(\mathcal{A}, M)$ est tué par $\{\varphi^{-n}(\varepsilon) - 1\}_{n \in \mathbf{N}_{>0}}$ et $\{x \in \mathcal{R}, x^{(0)} \in \mathfrak{m}_{\overline{R}}\}$. Pour $n \in \mathbf{N}$, notons $\mathrm{Fil}^n \mathcal{A}$ l'idéal de \mathcal{A} engendré par $\tilde{p}^{n_0} u_1^{n_1} \cdots u_d^{n_d}$ pour $\underline{n} = (n_0, \dots, n_d) \in \mathbf{N}^{d+1}$ tel que $|\underline{n}| = n$. On obtient ainsi une filtration décroissante sur \mathcal{A} . On a $\mathrm{Fil}^n \mathcal{A} = 0$ pour $n \geq (d+1)p$, et $\mathrm{Gr}^n \mathcal{A} = \bigoplus_{|\underline{n}|=n} (\mathcal{R}/\tilde{p}^p\mathcal{R}) \tilde{p}^{n_0} u_1^{n_1} \cdots u_d^{n_d}$ pour $n < (d+1)p$. D'après la preuve de la proposition 5.1.2, l'homomorphisme $\mathcal{R}/\tilde{p}^p\mathcal{R} \rightarrow \overline{R}/p\overline{R}$; $x \mapsto x_0$ est un isomorphisme. Par ailleurs, sur $\mathrm{Gr}^n \mathcal{A}$, la multiplication par T_i est la multiplication par $\tilde{T}_i + u_i \equiv \tilde{T}_i \pmod{\mathrm{Fil}^{n+1} \mathcal{A}}$, i.e. par T_i lorsqu'on identifie $\mathcal{R}/\tilde{p}^p\mathcal{R}$ à $\overline{R}/p\overline{R}$: le R_0 -module $\mathrm{Gr}^n \mathcal{A}$ est donc un produit fini de $\overline{R}/p\overline{R}$. Pour $n \in \mathbf{N}_{>0}$, l'image de $\varphi^{-n}(\varepsilon) - 1$ dans $\mathrm{Gr}^n \mathcal{A}$ est celle de $\pi_n \in \mathfrak{m}_{\overline{R}}$ et pour $x \in \mathcal{R}$ tel que $x^{(0)} \in \mathfrak{m}_{\overline{R}}$, l'image de $[x]$ dans $\mathrm{Gr}^n \mathcal{A}$ est $x_0 \in \mathfrak{m}_{\overline{R}} \overline{R}/p\overline{R}$. D'après le lemme 6.3.2, les \overline{R} -modules $\mathrm{Tor}_1^{R_0/pR_0}(\mathrm{Gr}^n \mathcal{A}, M)$ sont tués par $\mathfrak{m}_{\overline{R}}$, i.e. par \mathcal{I} comme A_{cris} -modules. Comme $\mathcal{I}^2 \equiv \mathcal{I} \pmod{pA_{\mathrm{cris}}}$ (lemme 6.3.1), une récurrence finie montre que le module $\mathrm{Tor}_1^{R_0/pR_0}(\mathcal{A}/\mathrm{Fil}^n \mathcal{A}, M)$ est tué par \mathcal{I} pour tout $n \in \mathbf{N}$. Comme $\mathrm{Fil}^n \mathcal{A} = 0$ pour $n \geq (d+1)p$, le A_{cris} -module $\mathrm{Tor}_1^{R_0/pR_0}(\mathcal{A}, M)$ est tué par \mathcal{I} . \square

Lemme 6.3.4. — *Si $n \in \mathbf{N}_{>0}$ et $M \in \mathbf{Mod}(R_0)$, le A_{cris} -module $\mathrm{Tor}_1^{R_0/p^n R_0}(A_{\mathrm{cris}}/p^n A_{\mathrm{cris}}, M/p^n M)$ est tué par \mathcal{I} .*

Démonstration. — Le cas $n = 1$ n'est autre que le lemme 6.3.3. Supposons $n > 1$. On a la suite exacte $0 \rightarrow pR_0/p^n R_0 \rightarrow R_0/p^n R_0 \rightarrow R_0/pR_0 \rightarrow 0$ d'où la suite exacte $0 \rightarrow \mathrm{Tor}_1^{R_0/p^n R_0}(A_{\mathrm{cris}}/p^n A_{\mathrm{cris}}, R_0/pR_0) \rightarrow pA_{\mathrm{cris}}/p^n A_{\mathrm{cris}} \rightarrow A_{\mathrm{cris}}/p^n A_{\mathrm{cris}}$. On en déduit que $\mathrm{Tor}_1^{R_0/p^n R_0}(A_{\mathrm{cris}}/p^n A_{\mathrm{cris}}, R_0/pR_0) = 0$, car A_{cris} n'a pas de p -torsion (proposition 6.1.10).

Soit $0 \rightarrow N_1 \rightarrow L_1 \rightarrow M/pM \rightarrow 0$ une suite exacte de R_0/pR_0 -modules, avec L_1 libre. On a la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathrm{Tor}_1^{R_0/p^n R_0}(A_{\mathrm{cris}}/p^n A_{\mathrm{cris}}, M/pM) \rightarrow (A_{\mathrm{cris}}/p^n A_{\mathrm{cris}}) \otimes_{R_0/p^n R_0} N_1 \rightarrow (A_{\mathrm{cris}}/p^n A_{\mathrm{cris}}) \otimes_{R_0/p^n R_0} L_1$$

(on a $\mathrm{Tor}_1^{R_0/p^n R_0}(A_{\mathrm{cris}}/p^n A_{\mathrm{cris}}, L_1) = 0$ parce que $\mathrm{Tor}_1^{R_0/p^n R_0}(A_{\mathrm{cris}}/p^n A_{\mathrm{cris}}, R_0/pR_0) = 0$ et L_1 est libre sur R_0/pR_0). L'application $(A_{\mathrm{cris}}/p^n A_{\mathrm{cris}}) \otimes_{R_0/p^n R_0} N_1 \rightarrow (A_{\mathrm{cris}}/p^n A_{\mathrm{cris}}) \otimes_{R_0/p^n R_0} L_1$ s'identifie à $(A_{\mathrm{cris}}/pA_{\mathrm{cris}}) \otimes_{R_0/pR_0} N_1 \rightarrow (A_{\mathrm{cris}}/pA_{\mathrm{cris}}) \otimes_{R_0/pR_0} L_1$, dont le noyau est $\mathrm{Tor}_1^{R_0/pR_0}(A_{\mathrm{cris}}/pA_{\mathrm{cris}}, M/pM)$ (car L_1 est libre sur R_0/pR_0). Ce noyau est donc tué par \mathcal{I} d'après le lemme 6.3.3 : le A_{cris} -module $\mathrm{Tor}_1^{R_0/p^n R_0}(A_{\mathrm{cris}}/p^n A_{\mathrm{cris}}, M/pM)$ est donc tué par \mathcal{I} .

Soit $j \in \{2, \dots, n\}$ tel que pour tout R_0 -module N , le A_{cris} -module $\mathrm{Tor}_1^{R_0/p^n R_0}(A_{\mathrm{cris}}/p^n A_{\mathrm{cris}}, N/p^{j-1}N)$ est tué par \mathcal{I} . On a la suite exacte $0 \rightarrow pM/p^j M \rightarrow M/p^j M \rightarrow M/pM \rightarrow 0$ d'où la suite exacte

$$\mathrm{Tor}_1^{R_0/p^n R_0}(A_{\mathrm{cris}}/p^n A_{\mathrm{cris}}, pM/p^j M) \rightarrow \mathrm{Tor}_1^{R_0/p^n R_0}(A_{\mathrm{cris}}/p^n A_{\mathrm{cris}}, M/p^j M) \rightarrow \mathrm{Tor}_1^{R_0/p^n R_0}(A_{\mathrm{cris}}/p^n A_{\mathrm{cris}}, M/pM).$$

D'après ce qui précède, le A_{cris} -module $\mathrm{Tor}_1^{R_0/p^n R_0}(A_{\mathrm{cris}}/p^n A_{\mathrm{cris}}, M/pM)$ est tué par \mathcal{I} , et le A_{cris} -module $\mathrm{Tor}_1^{R_0/p^n R_0}(A_{\mathrm{cris}}/p^n A_{\mathrm{cris}}, pM/p^j M)$ est tué par \mathcal{I} par hypothèse. Le A_{cris} -module $\mathrm{Tor}_1^{R_0/p^n R_0}(A_{\mathrm{cris}}/p^n A_{\mathrm{cris}}, M/p^j M)$ est donc tué par $\mathcal{I}^2 \equiv \mathcal{I} \pmod{p^n A_{\mathrm{cris}}}$ (lemme 6.3.1).

Une récurrence finie montre donc que le A_{cris} -module $\mathrm{Tor}_1^{R_0/p^n R_0}(A_{\mathrm{cris}}/p^n A_{\mathrm{cris}}, M/p^n M)$ est tué par \mathcal{I} . \square

Lemme 6.3.5. — *Si M est un R_0 -module de type fini, l'application naturelle $A_{\mathrm{cris}} \otimes_{R_0} M \rightarrow \varinjlim_n (A_{\mathrm{cris}}/p^n A_{\mathrm{cris}}) \otimes_{R_0} M$ est surjective.*

Démonstration. — Il suffit d'appliquer le corollaire 9.2.5 avec $\Lambda = R_0$, $I_0 = pR_0$ et $B = \widehat{B} = A_{\mathrm{cris}}$. \square

Lemme 6.3.6. — *Si M est un R_0 -module de type fini sans p -torsion, le noyau de l'application naturelle $A_{\mathrm{cris}} \otimes_{R_0} M \rightarrow \varinjlim_n (A_{\mathrm{cris}}/p^n A_{\mathrm{cris}}) \otimes_{R_0} M$ est tué par \mathcal{I} .*

Démonstration. — On reprend la preuve de la proposition 9.2.6 avec $\Lambda = R_0$, $B = \widehat{B} = A_{\text{cris}}$ et $I = \mathcal{I}$. Comme M est de type fini et R_0 est noethérien, il existe une suite exacte $0 \rightarrow K \xrightarrow{u} L \xrightarrow{v} M \rightarrow 0$ avec L libre de type fini et K de type fini. Comme M est sans p torsion, cette suite induit la suite exacte $0 \rightarrow K/p^n K \rightarrow L/p^n L \rightarrow M/p^n M \rightarrow 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}_{>0}$. On a donc une suite exacte

$$0 \rightarrow X_n \rightarrow (A_{\text{cris}}/p^n A_{\text{cris}}) \otimes_{R_0} K \rightarrow (A_{\text{cris}}/p^n A_{\text{cris}}) \otimes_{R_0} L \rightarrow (A_{\text{cris}}/p^n A_{\text{cris}}) \otimes_{R_0} M \rightarrow 0$$

dans laquelle, comme $A_{\text{cris}}/p^n A_{\text{cris}}$ est \mathcal{I} -plat sur $R_0/p^n R_0$ (lemme 6.3.4), $X_n = \text{Tor}_1^{R_0/p^n R_0}(A_{\text{cris}}/p^n A_{\text{cris}}, M/p^n M)$ est tué par \mathcal{I} . On en déduit le diagramme commutatif suivant, dont la première ligne est exacte

$$\begin{array}{ccccccc} A_{\text{cris}} \otimes_{\widehat{R}} K & \xrightarrow{1 \otimes u} & A_{\text{cris}} \otimes_{R_0} L & \xrightarrow{1 \otimes v} & A_{\text{cris}} \otimes_{R_0} M & \longrightarrow & 0 \\ q_1 \downarrow & & q_2 \downarrow & & q_3 \downarrow & & \\ \varprojlim_n X_n \hookrightarrow & \varprojlim_n (A_{\text{cris}}/p^n A_{\text{cris}}) \otimes_{R_0} K & \longrightarrow & \varprojlim_n (A_{\text{cris}}/p^n A_{\text{cris}}) \otimes_{R_0} L & \longrightarrow & \varprojlim_n (A_{\text{cris}}/p^n A_{\text{cris}}) \otimes_{R_0} M & \longrightarrow 0 \end{array}$$

et où q_2 est un isomorphisme. Par ailleurs, les homomorphismes q_1 et q_3 sont surjectifs en vertu du lemme 6.3.5. Un raisonnement identique à celui de la preuve de la proposition 9.2.6 montre alors que les éléments de $\in \text{Ker}(q_3)$ sont tués par \mathcal{I} . \square

Proposition 6.3.7. — *Le R_0 -module A_{cris} est \mathcal{I}^2 -plat.*

Démonstration. — Soit \mathfrak{a} un idéal de R_0 et $j: \mathfrak{a} \otimes_{R_0} A_{\text{cris}} \rightarrow A_{\text{cris}}$ l'application naturelle. Soit $n \in \mathbf{N}_{>0}$, montrons que $\mathcal{I} \text{Ker}(j) \subseteq p^n (\mathfrak{a} \otimes_{R_0} A_{\text{cris}})$.

D'après le lemme d'Artin-Rees, il existe un entier m tel que $p^m R_0 \cap \mathfrak{a} \subseteq p^n \mathfrak{a}$. Soient

$$f: \mathfrak{a} \otimes_{R_0} A_{\text{cris}} \rightarrow (\mathfrak{a}/(p^m R_0 \cap \mathfrak{a})) \otimes_{R_0} A_{\text{cris}}$$

$$\text{et } g: (\mathfrak{a}/(p^m R_0 \cap \mathfrak{a})) \otimes_{R_0} A_{\text{cris}} \rightarrow (\mathfrak{a}/p^n \mathfrak{a}) \otimes_{R_0} A_{\text{cris}} = (\mathfrak{a} \otimes_{R_0} A_{\text{cris}})/p^n (\mathfrak{a} \otimes_{R_0} A_{\text{cris}}).$$

D'après le lemme 6.3.4, $A_{\text{cris}}/p^m A_{\text{cris}}$ est \mathcal{I} -plat sur $R_0/p^m R_0$. Le noyau de l'homomorphisme

$$h: (\mathfrak{a}/(p^m R_0 \cap \mathfrak{a})) \otimes_{R_0} A_{\text{cris}} = (\mathfrak{a}/(p^m R_0 \cap \mathfrak{a})) \otimes_{R_0/p^m R_0} (A_{\text{cris}}/p^m A_{\text{cris}}) \rightarrow A_{\text{cris}}/p^m A_{\text{cris}}$$

est donc tué par \mathcal{I} . Par ailleurs, on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{a} \otimes_{R_0} A_{\text{cris}} & \xrightarrow{f} & (\mathfrak{a}/(p^m R_0 \cap \mathfrak{a})) \otimes_{R_0} A_{\text{cris}} \\ j \downarrow & & \downarrow h \\ A_{\text{cris}} & \longrightarrow & A_{\text{cris}}/p^m A_{\text{cris}}. \end{array}$$

Si $x \in \text{Ker}(j)$, alors $h(f(x)) = 0$ d'où $\mathcal{I}f(x) = 0$. On a donc $\mathcal{I}x \subseteq \text{Ker}(f) \subseteq \text{Ker}(g \circ f) = p^n (\mathfrak{a} \otimes_{R_0} A_{\text{cris}})$.

Comme c'est vrai pour tout $n \in \mathbf{N}_{>0}$, on a $\mathcal{I} \text{Ker}(j) \subseteq \bigcap_{n>0} p^n (\mathfrak{a} \otimes_{R_0} A_{\text{cris}})$. D'après le lemme 6.3.6, le noyau de l'homomorphisme naturel $\mathfrak{a} \otimes_{R_0} A_{\text{cris}} \rightarrow \varprojlim_n (\mathfrak{a} \otimes_{R_0} (A_{\text{cris}}/p^n A_{\text{cris}}))$ est tué par \mathcal{I} (comme R_0 est noethérien sans p -torsion, \mathfrak{a} est de type fini sans p -torsion). On a donc $\mathcal{I}^2 \text{Ker}(j) = 0$, ce qu'on voulait. \square

Théorème 6.3.8. — *La $R_0[p^{-1}]$ -algèbre B_{cris} est fidèlement plate.*

Démonstration. — On a

$$[\varepsilon]^{p^2} - 1 = \exp(p^2 t) - 1 = p^2 t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(p^2 t)^n}{(n+1)!} = p^2 t \left(1 + p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^{2n-1}}{n+1} t^{[n]} \right).$$

Pour tout $n \in \mathbf{N}_{>0}$, on a $\frac{p^{2n-1}}{n+1} \in \mathbf{Z}_p$ (si $n = pm - 1$ avec $m \in \mathbf{N}_{>0}$, on a $v(\frac{p^{2n-1}}{n+1}) = 2(pm - 2) - v(m) \geq 4(m - 1) - v(m) \geq 0$) et sa valuation p -adique tend vers 0. La série $\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^{2n-1}}{n+1} t^{[n]}$ converge donc dans A_{cris} ,

et $[\varepsilon]^{p^2} - 1 = p^2 t(1 + p\lambda)$ i.e. $[\varepsilon]^{p^2} - 1 \in p^2 t A_{\text{cris}}^\times$ (car A_{cris} est complet pour la topologie p -adique). Comme p et t sont inversibles dans B_{cris} et $[\varepsilon]^{p^2} - 1 \in \mathcal{I}$, on a $\mathcal{I} B_{\text{cris}} = B_{\text{cris}}$. Comme A_{cris} est \mathcal{I} -plat sur R_0 , l'anneau $B_{\text{cris}} = A_{\text{cris}}[p^{-1}, t^{-1}]$ est plat sur $R_0[p^{-1}]$. Par ailleurs, B_{cris} est une sous- $R_0[p^{-1}]$ -algèbre de B_{dR} . Comme B_{dR} est un $R_0[p^{-1}]$ -module fidèle (théorème 5.4.1), il en est de même de B_{cris} . \square

CHAPITRE 7

\$(\varphi, \nabla)\$-MODULES FILTRÉS

7.1. La catégorie des \$(\varphi, \nabla)\$-modules filtrés

7.1.1. \$(\varphi, \nabla)\$-modules. —

Rappelons (proposition 2.0.2) qu'on a un isomorphisme $\widehat{\Omega}_R^1[p^{-1}] \simeq \bigoplus_{i=1}^d R[p^{-1}] d\log(T_i)$. Soit D un $R[p^{-1}]$ -module. La donnée d'une connexion $\nabla: D \rightarrow D \otimes_{R[p^{-1}]} \widehat{\Omega}_R^1[p^{-1}]$ est équivalente à la donnée de d dérivations $N_i: D \rightarrow D$ (correspondant à la projection $\widehat{\Omega}_R^1[p^{-1}] \rightarrow R[p^{-1}] d\log(T_i)$). Rappelons que la connexion est intégrable revient à dire que les dérivations N_i commutent deux à deux (cf. [39, 1.0]).

Lemme 7.1.1. — *Les anneaux R_0 et $R[p^{-1}]$ sont réguliers.*

Démonstration. — Rappelons que si A est un anneau régulier, il en est de même de $A[X_1, \dots, x_n]$ (cf. [32, Proposition 17.3.7]), de tout localisé de A , de toute A -algèbre étale (cf. [35, I Corollaire 9.2]) et de tout complété (cf. [32, Lemme 17.3.8.1]). Comme W est régulier, il en est donc de même de $W[T_1^{\pm 1}, \dots, T_d^{\pm 1}]$ et de son complété p -adique $W\{T_1^{\pm 1}, \dots, T_d^{\pm 1}\}$. Comme l'anneau R_0 est obtenu à partir de $W\{T_1^{\pm 1}, \dots, T_d^{\pm 1}\}$ en itérant les opérations (ét), (loc) et (comp) dont chacune préserve la régularité d'après ce qui précède, on en déduit la régularité de R_0 . Enfin $R[p^{-1}]$ est étale sur $R_0[p^{-1}]$ qui est régulier d'après ce qu'on vient de voir : il est donc régulier. \square

Proposition 7.1.2. — *Soit D un $R[p^{-1}]$ -module muni d'une connexion intégrable $\nabla: D \rightarrow D \otimes_{R[p^{-1}]} \widehat{\Omega}_R^1[p^{-1}]$. Si D est de type fini, alors il est projectif.*

Démonstration. — L'anneau $R[p^{-1}]$ est noethérien régulier (lemme 7.1.1) et contient le corps $W[p^{-1}]$. Si $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R[p^{-1}])$, l'anneau local $(R[p^{-1}])_{\mathfrak{p}}$ est donc noethérien régulier, et son corps résiduel $\kappa(\mathfrak{p})$ est une extension séparable de $W[p^{-1}]$. D'après [42, Lemma 1, p. 216], l'anneau $(R[p^{-1}])_{\mathfrak{p}}$ est donc $\mathfrak{p}(R[p^{-1}])_{\mathfrak{p}}$ -lisse (formellement lisse) sur $W[p^{-1}]$, et son complété est isomorphe à une $\kappa(\mathfrak{p})$ -algèbre de séries formelles $\kappa(\mathfrak{p})[[X_1, \dots, X_n]]$.

Mais d'après [39, Proposition 8.8], si S est un schéma lisse sur un corps κ de caractéristique 0, tout faisceau de modules cohérent sur S muni d'une κ -connexion intégrable est localement libre. La démonstration, qui repose sur la proposition 8.9 de *loc. cit.*, ne nécessite que le fait que les complétés $\widehat{\mathcal{O}}_{S,s}$ des anneaux locaux en les points fermés de S sont formellement lisses sur leur corps résiduel. La conclusion de [39, Proposition 8.8] est donc valable pour $S = \text{Spec}(R[p^{-1}])$. On en déduit que tout $R[p^{-1}]$ -module de type fini à $W[p^{-1}]$ -connexion intégrable est localement libre *i.e.* projectif. \square

Il en résulte que la catégorie des $R[p^{-1}]$ -modules de type fini munis d'une connexion intégrable est abélienne.

Définition 7.1.3. — Un ∇ -module D sur $R[p^{-1}]$ est la donnée d'un $R[p^{-1}]$ -module de type fini D , muni d'une connexion intégrable $\nabla: D \rightarrow D \otimes_{R[p^{-1}]} \widehat{\Omega}_R^1[p^{-1}]$. Un morphisme de ∇ -modules $f: D \rightarrow D'$ est un homomorphisme de $R[p^{-1}]$ -modules qui commute aux connexions. On obtient ainsi une catégorie abélienne $W[p^{-1}]$ -linéaire, notée $\mathbf{M}_R(\nabla)$.

D'après la proposition 7.1.2, le $R[p^{-1}]$ -module sous-jacent à un ∇ -module sur R est projectif. On peut donc parler de son rang (car $\text{Spec}(R[p^{-1}])$ est connexe).

Proposition 7.1.4. — *Soit D un $R_0[p^{-1}]$ -module projectif de type fini, muni d'un opérateur de Frobenius $\varphi: D \rightarrow D$ qui est semi-linéaire par rapport au Frobenius sur $R_0[p^{-1}]$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *L'homomorphisme $R_0[p^{-1}]$ -linéaire $\tilde{\varphi}: \sigma^*D \rightarrow D$ déduit de φ est un isomorphisme (où $\sigma^*D = R_{0,\sigma} \otimes_{R_0} D$).*

(ii) $\varphi(D)$ engendre le $R_0[p^{-1}]$ -module D .

Démonstration. — En prenant la puissance extérieure maximale et en localisant, on se ramène au cas d'un module libre de rang 1 pour lequel c'est évident. \square

Remarque 7.1.5. — Dans ces conditions, l'application φ est injective, mais en général, l'injectivité de φ n'implique pas celle de $\tilde{\varphi}$.

Définition 7.1.6. — Soit D un ∇ -module sur $R_0[p^{-1}]$. La connexion ∇ est dite *quasi-nilpotente* s'il existe un sous- R_0 -module \mathcal{D} de D qui est de type fini, séparé et complet pour la topologie p -adique, stable par ∇ (i.e. tel que $\nabla(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{D} \otimes_{R_0} \widehat{\Omega}_{R_0}^1$) tel que $D = \mathcal{D}[p^{-1}]$, et que la connexion induite par réduction modulo p est nilpotente (cette dernière condition revient à demander qu'il existe des entiers e_i tels que $\prod_{i=1}^d \left(\frac{N_i}{T_i}\right)^{pe_i}$ envoie \mathcal{D} dans $p\mathcal{D}$ (où les N_i (pour $i \in \{1, \dots, d\}$) sont les dérivations associées à ∇).

Définition 7.1.7. — Un (φ, ∇) -module sur $R_0[p^{-1}]$ est un ∇ -module D sur $R_0[p^{-1}]$ tel que la connexion soit quasi-nilpotente, qui est muni d'un opérateur de Frobenius $\varphi: D \rightarrow D$ semi-linéaire par rapport au Frobenius sur $R_0[p^{-1}]$ tel que l'homomorphisme $R_0[p^{-1}]$ -linéaire $\tilde{\varphi}: \sigma^*D \rightarrow D$ déduit de φ est un isomorphisme (d'après la proposition 7.1.4, cela revient à demander que $R_0[p^{-1}]\varphi(D) = D$) et tel que $\varphi\nabla = \nabla\varphi$. Un *morphisme de* (φ, ∇) -modules $f: (D_1, \varphi_1, \nabla_1) \rightarrow (D_2, \varphi_2, \nabla_2)$ est la donnée d'un morphisme f entre les ∇ -modules sur $R_0[p^{-1}]$ sous-jacents tel que $f \circ \varphi_1 = \varphi_2 \circ f$. On obtient ainsi une catégorie $W[p^{-1}]$ -linéaire, notée $\mathbf{M}_{R_0}(\varphi, \nabla)$.

Lemme 7.1.8. — Soit A un anneau noethérien, séparé et complet pour la topologie p -adique et sans p -torsion. Soit $\sigma: A \rightarrow A$ un relèvement du Frobenius. Alors $\sigma: A \rightarrow A$ est plat.

Démonstration. — Comme A est complet pour la topologie p -adique, on a $pA \subseteq \text{rad}(A)$, d'après le critère local de platitude ([42, Theorem 22.3]), il suffit de vérifier que $\sigma: A/pA \rightarrow A/pA$ est plat et que $\text{Tor}_1^A(A/pA, A_\sigma) = 0$ (où A_σ désigne A vu comme A -module via σ).

Soit $B = A/pA$, c'est un anneau noethérien régulier de caractéristique p , montrons que $\sigma: B \rightarrow B$ (l'élévation à la puissance p) est plat. Quitte à localiser (cf. [42, Theorem 7.1]), on peut supposer B local. Quitte à compléter B (cf. [42, Theorem 22.4 (ii)]), on peut supposer B complet. Mais B étant local régulier complet et équicaractéristique, on a $B \simeq \kappa(B)[[X_1, \dots, X_n]]$ où $\kappa(B)$ est le corps résiduel de B . La platitude résulte alors de ce que $\sigma: B \rightarrow B$ est libre, de base $\{\beta X_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n}\}_{\substack{\beta \in \mathfrak{B} \\ 0 \leq i_1, \dots, i_n < p}}$, où \mathfrak{B} est une base de $\kappa(B)$, vu comme $\kappa(B)$ -espace vectoriel via σ .

Comme A est sans p -torsion, on a la suite exacte $0 \rightarrow A \xrightarrow{p} A \rightarrow A/pA \rightarrow 0$, et donc la suite exacte $0 \rightarrow \text{Tor}_1^A(A/pA, A_\sigma) \rightarrow A_\sigma \xrightarrow{p} A_\sigma$, et on a bien $\text{Tor}_1^A(A/pA, A_\sigma) = 0$. \square

Lemme 7.1.9. — L'homomorphisme $\sigma: R_0 \rightarrow R_0$ est plat.

Démonstration. — Il suffit d'appliquer le lemme 7.1.8 à $A = R_0$, qui est séparé et complet pour la topologie p -adique, sans p -torsion par hypothèse, et régulier d'après le lemme 7.1.1. \square

Remarque 7.1.10. — Supposons les hypothèses du lemme 7.1.8 remplies. Soit M un A -module de type fini sans p -torsion, muni d'un opérateur σ -linéaire $\varphi: M \rightarrow M$ étale, i.e. dont le linéarisé $\tilde{\varphi}: M_\sigma \rightarrow M$ est un isomorphisme. Alors M est projectif sur A .

En effet, l'anneau A est noethérien et M de type fini, il est de présentation finie : il suffit donc de vérifier que M est plat sur A ([42, Theorem 7.12]). Comme précédemment, on a $pA \subseteq \text{rad}(A)$. Le A -module M étant de type fini, le critère local de platitude ([42, Theorem 22.3]) implique qu'il suffit de vérifier que M/pM est un A/pA -module plat et que $\text{Tor}_1^A(A/pA, M) = 0$.

Posons $B = A/pA$ et $N = M/pM$. L'anneau B est noethérien régulier de caractéristique p et N est muni d'un opérateur σ -linéaire étale $\varphi: N \rightarrow N$. Montrons que N est plat sur B . Comme précédemment, quitte à localiser et à compléter (cf. [42, Theorems 7.1 & 22.4 (ii)]), on peut supposer B local complet donc $B \simeq \kappa(B)[[X_1, \dots, X_n]]$. Si K est une extension de $\kappa(B)$, on a un isomorphisme $(K \otimes_{\kappa(B)} B)_\sigma \otimes_{K \otimes_{\kappa(B)} B} (K \otimes_{\kappa(B)} N) \xrightarrow{\sim} K \otimes_{\kappa(B)} (B_\sigma \otimes_B N)$ donné par $(\alpha \otimes a) \otimes (\beta \otimes b) \mapsto \alpha\sigma(\beta) \otimes (a \otimes b)$ et dont l'inverse est donné par $\alpha \otimes (a \otimes b) \mapsto (\alpha \otimes a) \otimes (1 \otimes b)$. On a alors un isomorphisme $(K \otimes_{\kappa(B)} B)_\sigma \otimes_{K \otimes_{\kappa(B)} B} (K \otimes_{\kappa(B)} N) \xrightarrow{\sim} K \otimes_{\kappa(B)} (B_\sigma \otimes_B N) \xrightarrow{K \otimes \tilde{\varphi}} K \otimes_{\kappa(B)} N$: par descente fidèlement plate et quitte à remplacer B par $K \otimes_{\kappa(B)} B$ et N par $K \otimes_{\kappa(B)} N$ avec K parfait, on peut supposer que $K = \kappa(B)$ est parfait.

On applique de nouveau le critère local de platitude, avec cette fois l'idéal maximal $\mathfrak{m} = (X_1, \dots, X_d)$ de B . D'après [42, Theorem 22.3], il suffit de voir que pour tout $n \in \mathbf{N}$, l'homomorphisme surjectif

$$\gamma_n: (\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}) \otimes_K N_0 \rightarrow \mathfrak{m}^n N/\mathfrak{m}^{n+1} N$$

est bijectif (où $N_0 = N/\mathfrak{m}N$). Il suffit pour cela de montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $\dim_K(\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}) \dim_K(N_0) = \dim_K(\mathfrak{m}^n N/\mathfrak{m}^{n+1}N)$. Montrons qu'en fait pour tout $n \in \mathbf{N}_{>0}$, on a $(B/\mathfrak{m}^n B)_{\sigma^r} \otimes_K N_0 \simeq N/\mathfrak{m}^n N$ pour $r \gg 0$ (cela implique bien le résultat, car K étant parfait, on a $\sigma(K) = K$).

Si $r \in \mathbf{N}_{>0}$, on dispose de l'isomorphisme $\tilde{\varphi}^r: B_{\sigma^r} \otimes_B N \xrightarrow{\sim} N$. Ce dernier induit un isomorphisme $B_{\sigma^r} \otimes_B \mathfrak{m}N \xrightarrow{\sim} \sigma^r(\mathfrak{m})N$, d'où un isomorphisme

$$(B/\sigma^r(\mathfrak{m})B)_{\sigma^r} \otimes_K N_0 \simeq B_{\sigma^r} \otimes_B (N/\mathfrak{m}N) \xrightarrow{\sim} N/\sigma^r(\mathfrak{m})N.$$

Or on a $\sigma(\mathfrak{m}) \subseteq \mathfrak{m}^p$ et donc $\sigma^r(\mathfrak{m}) \subseteq \mathfrak{m}^{p^r}$: si $n \leq p^r$, on a $\sigma^r(\mathfrak{m}) \subseteq \mathfrak{m}^n$. En tensorisant le dernier isomorphisme par $B/\mathfrak{m}^n B$ au-dessus de $B/\sigma^r(\mathfrak{m})B$, on obtient l'isomorphisme $(B/\mathfrak{m}^n B)_{\sigma^r} \otimes_K N_0 \simeq N/\mathfrak{m}^n N$ recherché.

Enfin, l'anneau A étant sans p -torsion, on a la suite exacte $0 \rightarrow \mathrm{Tor}_1^A(A/pA, M) \rightarrow M \xrightarrow{p} M$ et donc $\mathrm{Tor}_1^A(A/pA, M) = 0$ vu que M est sans p -torsion par hypothèse.

Proposition 7.1.11. — *La catégorie $\mathbf{M}_{R_0}(\varphi, \nabla)$ est abélienne.*

Démonstration. — Compte tenu du fait que la catégorie $\mathbf{M}_{R_0}(\nabla)$ est abélienne, il s'agit de vérifier que pour un morphisme f de (φ, ∇) -modules sur $R_0[p^{-1}]$, les Frobenius induits sur $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Coker}(f)$ (dans la catégorie $\mathbf{M}_{R_0}(\nabla)$) vérifient les conditions équivalentes de la proposition 7.1.4, et que les connexions induites sur $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Coker}(f)$ sont quasi-nilpotentes.

Il suffit de voir que si $(D_1, \nabla_1), (D_2, \nabla_2)$ sont des ∇ -modules sur $R_0[p^{-1}]$, munis d'opérateurs φ_1, φ_2 σ -linéaires, et si (D, φ, ∇) est un (φ, ∇) -module sur $R_0[p^{-1}]$ tel que (D, ∇) est extension de (D_2, ∇_2) par (D_1, ∇_1) , telle que φ induit φ_1 (resp. φ_2) sur D_1 (resp. D_2), alors $(D_1, \varphi_1, \nabla_1)$ et $(D_2, \varphi_2, \nabla_2)$ sont des (φ, ∇) -modules sur $R_0[p^{-1}]$. On a le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \sigma^* D_1 & \longrightarrow & \sigma^* D & \longrightarrow & \sigma^* D_2 \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \tilde{\varphi}_1 & & \downarrow \tilde{\varphi} & & \downarrow \tilde{\varphi}_2 \\ 0 & \longrightarrow & D_1 & \longrightarrow & D & \longrightarrow & D_2 \longrightarrow 0 \end{array}$$

dont les lignes sont exactes, en vertu de la platitude de $\sigma: R_0 \rightarrow R_0$ (lemme 7.1.9). Comme $\tilde{\varphi}$ est un isomorphisme, il en est de même de $\tilde{\varphi}_1$ et $\tilde{\varphi}_2$.

Il reste à montrer que les connexions ∇_1 et ∇_2 sont quasi-nilpotentes. Comme la connexion ∇ est quasi-nilpotente, il existe un sous- R_0 -module \mathcal{D} de D qui est de type fini, séparé et complet pour la topologie p -adique, stable par ∇ , tel que $D = \mathcal{D}[p^{-1}]$, et des entiers e_i tels que $\prod_{i=1}^d N_i^{pe_i}$ envoie \mathcal{D} dans $p\mathcal{D}$ (où les N_i sont les dérivations associées à ∇). Notons \mathcal{D}_2 l'image de \mathcal{D} dans D_2 et $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D} \cap D_1$. Pour $j \in \{1, 2\}$, le R_0 -module \mathcal{D}_j est de type fini (R_0 est noethérien) séparé et complet pour la topologie p -adique, stable par ∇_j par construction. Par ailleurs, on a $\mathcal{D}_j = \mathcal{D}_j[p^{-1}]$ et $\prod_{i=1}^d N_i^{pe_i}$ envoie \mathcal{D}_j dans $p\mathcal{D}_j$. Les connexions ∇_1 et ∇_2 sont donc quasi-nilpotentes, ce qu'on voulait. \square

Si D_1 et D_2 sont deux (φ, ∇) -modules sur $R_0[p^{-1}]$, on a une structure de (φ, ∇) -module sur $R_0[p^{-1}]$ sur $D_1 \otimes_{R_0[p^{-1}]} D_2$ donnée (avec des notations évidentes) par $\varphi(x_1 \otimes x_2) = \varphi_1(x_1) \otimes \varphi_2(x_2)$ et $\nabla(x_1 \otimes x_2) = x_1 \otimes \nabla(x_2) + x_2 \otimes \nabla(x_1)$ pour $x_1 \in D_1, x_2 \in D_2$. L'homomorphisme $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}_1 \otimes \tilde{\varphi}_2$ est un isomorphisme. Par ailleurs, soit \mathcal{D}_1 (resp. \mathcal{D}_2) un sous- R_0 -module de D_1 (resp. D_2) qui est de type fini, séparé et complet pour la topologie p -adique, tel que $D_1 = \mathcal{D}_1[p^{-1}]$ (resp. $D_2 = \mathcal{D}_2[p^{-1}]$) et e_1, \dots, e_d des entiers tels que $\prod_{i=1}^d N_i^{pe_i}$ envoie \mathcal{D}_1 (resp. \mathcal{D}_2) dans $p\mathcal{D}_1$ (resp. $p\mathcal{D}_2$). Alors $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \otimes_{R_0} \mathcal{D}_2$ vérifie $\mathcal{D}[p^{-1}] = D_1 \otimes_{R_0[p^{-1}]} D_2$, et $\prod_{i=1}^d N_i^{pe_i}$ envoie \mathcal{D} dans $p\mathcal{D}$. On note $D_1 \otimes D_2$ le (φ, ∇) -module sur $R_0[p^{-1}]$ ainsi défini. De même, si h est un entier et D un (φ, ∇) -module sur $R_0[p^{-1}]$, le $R_0[p^{-1}]$ -module $\bigwedge^h D$ est naturellement muni d'une structure de (φ, ∇) -module sur $R_0[p^{-1}]$.

La catégorie $\mathbf{M}_{R_0}(\varphi, \nabla)$ a un objet unité : $\mathbf{1} = (R_0[p^{-1}], \sigma, d)$ (connexion triviale). Par ailleurs, si $D_1, D_2 \in \mathbf{M}_{R_0}(\varphi, \nabla)$, alors $\sigma^* \mathrm{Hom}_{R_0[p^{-1}]}(D_1, D_2) \simeq \mathrm{Hom}_{R_0[p^{-1}]}(\sigma^* D_1, \sigma^* D_2)$ par platitude de $\sigma: R_0 \rightarrow R_0$ (lemme 7.1.9). On peut donc définir un Frobenius sur le $R_0[p^{-1}]$ -module $\mathrm{Hom}_{R_0[p^{-1}]}(D_1, D_2)$ par $\tilde{\varphi}(f)(x) = \tilde{\varphi}_2((\mathrm{Id} \otimes f)(\tilde{\varphi}_1^{-1}x))$ pour $f \in \mathrm{Hom}_{R_0[p^{-1}]}(D_1, D_2)$ et $x \in D_1$. L'homomorphisme $\tilde{\varphi}$ ainsi défini est un isomorphisme. Par ailleurs, on définit une connexion sur $\mathrm{Hom}_{R_0[p^{-1}]}(D_1, D_2)$ par $\nabla(f)(x) = \nabla_2 \circ f(x) - f \circ \nabla_1(x)$ pour $f \in \mathrm{Hom}_{R_0[p^{-1}]}(D_1, D_2)$ et $x \in D_1$. Soit \mathcal{D}_1 (resp. \mathcal{D}_2) un sous- R_0 -module de D_1 (resp. D_2) qui est de type fini, séparé et complet pour la topologie p -adique, tel que $D_1 = \mathcal{D}_1[p^{-1}]$ (resp. $D_2 = \mathcal{D}_2[p^{-1}]$) et e_1, \dots, e_d des entiers tels que $\prod_{i=1}^d N_i^{pe_i}$ envoie \mathcal{D}_1 (resp. \mathcal{D}_2) dans $p\mathcal{D}_1$ (resp. $p\mathcal{D}_2$). Posons $\mathcal{D} = \mathrm{Hom}_{R_0}(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$. Comme \mathcal{D}_2 est de type fini sur $R_0[p^{-1}]$, on

a $\mathcal{D}[p^{-1}] = \text{Hom}_{R_0[p^{-1}]}(D_1, D_2)$, et $\prod_{i=1}^d N_i^{pe_i}$ envoie \mathcal{D} dans $p\mathcal{D}$. On note $\mathbf{Hom}(D_1, D_2)$ le (φ, ∇) -module sur $R_0[p^{-1}]$ ainsi défini. C'est un Hom interne pour la catégorie des (φ, ∇) -modules sur $R_0[p^{-1}]$.

Ce qui précède implique que la catégorie $\mathbf{M}_{R_0}(\varphi, \nabla)$, qui est une catégorie abélienne \mathbf{Q}_p -linéaire, est tannakienne (cf. [19]).

Si $n \in \mathbf{Z}$, on note $\mathbf{1}(n)$ le (φ, ∇) -module sur $R_0[p^{-1}]$ donné par $(R_0[p^{-1}], p^{-n}\sigma, d)$ (connexion triviale). On a $\mathbf{1}(0) = \mathbf{1}$. Si D est un (φ, ∇) -module sur $R_0[p^{-1}]$, on note $D(n) = D \otimes \mathbf{1}(n)$ (n -ième twist à la Tate) et $D^\vee = \mathbf{Hom}(D, \mathbf{1})$ (dual de D).

Remarque 7.1.12. — Comme R_0/pR_0 possède une p -base (T_1, \dots, T_d) , la catégorie $\mathbf{M}_{R_0}(\varphi, \nabla)$ s'identifie à la catégorie des F -isocristaux sur R_0/pR_0 (cf. [8, Proposition 1.3.3]). Si D est un objet de cette dernière, à tout « objet-test » (B, I, γ, s) (où B est une \mathbf{Z}_p -algèbre séparée et complète pour la topologie p -adique, I un idéal de B muni de puissances divisées γ compatibles avec les puissances divisées canoniques sur pB et $s: R_0/pR_0 \rightarrow B/I$ une structure de R_0/pR_0 -algèbre), on peut associer un B -module projectif $D_{(B, I, \gamma, s)}$, et une application $\tilde{\varphi}: D_{(B, I, \gamma, s \circ \sigma)} \rightarrow D_{(B, I, \gamma, s)}$.

Dans le cas où la condition (BR) est remplie, on a $R_0/pR_0 \xrightarrow{\sim} R/\varpi R$, la catégorie des F -isocristaux sur R_0/pR_0 et celle des F -isocristaux sur $R/\varpi R$ sont équivalentes, et on notera cette dernière $\mathbf{M}_R(\varphi, \nabla)$.

Définition 7.1.13. — Soit D un (φ, ∇) -module sur $R_0[p^{-1}]$ de rang h . Si κ est un corps parfait et $f: R_0/pR_0 \rightarrow \kappa$ est un homomorphisme, on dispose de l'objet-test $(W(\kappa), pW(\kappa), \gamma, f)$ et donc du $W(\kappa)[p^{-1}]$ -espace vectoriel $D_f := D_{(W(\kappa), pW(\kappa), \gamma, f)}$. Ce dernier est de dimension h et muni d'un endomorphisme σ -linéaire φ . Si δ est un vecteur non nul du (φ, ∇) -module $\bigwedge^h D_f$ sur $W(\kappa)[p^{-1}]$, on a $\bigwedge^h D_f = W(\kappa)[p^{-1}]\delta$. Il existe $\lambda \in W(\kappa)[p^{-1}]$ tel que $\varphi(\delta) = \lambda\delta$. Sa valuation p -adique $v(\lambda)$ est indépendante du choix de δ , et ne dépend que de $\mathfrak{p} = \text{Ker}(f) \in \text{Spec}(R_0/pR_0)$: on la note $t_N(D, \mathfrak{p})$. C'est la pente du Frobenius de $\bigwedge^h D$ en \mathfrak{p} .

- Remarque 7.1.14.** — (i) Avec les notations de la définition, si $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_h\}$ est une base de D_f , et \mathcal{M} la matrice dont la j -ième colonne est formée des composantes de $\varphi(e_j)$ sur \mathcal{B} , la matrice \mathcal{M} et son déterminant dépendent du choix de la base \mathcal{B} (car φ est seulement *semi*-linéaire), mais $v(\det(\mathcal{M}))$ n'en dépend pas, et c'est $t_N(D, \mathfrak{p})$.
- (ii) Si D est un (φ, ∇) -module de rang h sur $R_0[p^{-1}]$ et n un entier rationnel, on a $t_N(D^\vee, \mathfrak{p}) = -t_N(D, \mathfrak{p})$ et $t_N(D(n), \mathfrak{p}) = t_N(D, \mathfrak{p}) - nh$ pour tout $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R_0/pR_0)$.
- (iii) D'après le théorème de spécialisation de Grothendieck (cf. [40, Theorem 2.3.1]), la fonction $\mathfrak{p} \mapsto t_N(D, \mathfrak{p})$ est croissante par spécialisation.

Proposition 7.1.15. — La fonction t_N est additive.

Démonstration. — Soit $0 \rightarrow D' \rightarrow D \rightarrow D'' \rightarrow 0$ une suite exacte dans la catégorie $\mathbf{M}_{R_0}(\varphi, \nabla)$. Notons h, h' et h'' les rangs de D, D' et D'' respectivement. On a $h = h' + h''$ et $\bigwedge^h D \simeq (\bigwedge^{h'} D') \otimes (\bigwedge^{h''} D'')$ et donc $t_N(D, \mathfrak{p}) = t_N(D', \mathfrak{p}) + t_N(D'', \mathfrak{p})$. \square

7.1.2. ∇ -modules filtrés. —

Définition 7.1.16. — Un ∇ -module filtré sur $R[p^{-1}]$ est la donnée d'un ∇ -module Δ sur $R[p^{-1}]$, et d'une filtration $(\text{Fil}^r \Delta)_{r \in \mathbf{Z}}$ sur le $R[p^{-1}]$ -module sous-jacent qui est décroissante, séparée (i.e. $\text{Fil}^r \Delta = \{0\}$ pour $r \gg 0$), exhaustive (i.e. $\text{Fil}^r \Delta = \Delta$ pour $r \ll 0$), telle que $\nabla(\text{Fil}^r \Delta) \subseteq \text{Fil}^{r-1} \Delta \otimes_{R[p^{-1}]} \widehat{\Omega}_R^1[p^{-1}]$ (transversalité de Griffith) et telle que le gradué associé $\text{Gr}^\bullet \Delta$ est *projectif* sur $R[p^{-1}]$. Un *morphisme de ∇ -modules filtrés* $f: \Delta \rightarrow \Delta'$ est un morphisme entre les ∇ -modules sous-jacents qui respecte les filtrations i.e. tel que $f(\text{Fil}^r \Delta_1) \subseteq \text{Fil}^r \Delta_2$. On obtient ainsi une catégorie additive K -linéaire, notée $\mathbf{MF}_R(\nabla)$.

Remarque 7.1.17. — La catégorie $\mathbf{MF}_R(\nabla)$ n'est pas abélienne.

Si Δ_1 et Δ_2 sont deux ∇ -modules filtrés sur $R[p^{-1}]$, on a une structure de ∇ -module filtré sur $R[p^{-1}]$ sur $\Delta_1 \otimes_{R[p^{-1}]} \Delta_2$ donnée par la connexion habituelle et la filtration définie par

$$\text{Fil}^r (\Delta_1 \otimes_{R[p^{-1}]} \Delta_2) = \sum_{s \in \mathbf{Z}} \text{Im} (\text{Fil}^s \Delta_1 \otimes_{R[p^{-1}]} \text{Fil}^{r-s} \Delta_2 \rightarrow \Delta_1 \otimes_{R[p^{-1}]} \Delta_2)$$

pour $r \in \mathbf{Z}$. On a alors $\text{Gr}^r (\Delta_1 \otimes_{R[p^{-1}]} \Delta_2) \simeq \bigoplus_{s \in \mathbf{Z}} \text{Gr}^s \Delta_1 \otimes_{R[p^{-1}]} \text{Gr}^{r-s} \Delta_2$ (car $\text{Gr}^\bullet \Delta_1$ et $\text{Gr}^\bullet \Delta_2$ sont projectifs sur $R[p^{-1}]$). On note $\Delta_1 \otimes \Delta_2$ le ∇ -module filtré sur $R[p^{-1}]$ ainsi défini. De même, si Δ est un ∇ -module filtré et h un entier, on a une structure naturelle de ∇ -module filtré sur le $R[p^{-1}]$ -module $\bigwedge^h \Delta$.

La catégorie $\mathbf{MF}_R(\nabla)$ a un objet unité : $\mathbf{1} = (K, d, \text{Fil}^\bullet)$ avec $\text{Fil}^r \mathbf{1} = \mathbf{1}$ si $r \leq 0$ et $\text{Fil}^r \mathbf{1} = 0$ si $r > 0$. Par ailleurs, on a un Hom interne dans la catégorie des ∇ -modules filtrés sur $R[p^{-1}]$: si $\Delta_1, \Delta_2 \in \mathbf{M}_R(\nabla)$, alors $\mathbf{Hom}(\Delta_1, \Delta_2)$ est l'ensemble $\text{Hom}_{R[p^{-1}]}(\Delta_1, \Delta_2)$ muni de la connexion habituelle et de la filtration définie par $\text{Fil}^r \mathbf{Hom}(\Delta_1, \Delta_2) = \{f \in \text{Hom}_{R[p^{-1}]}(\Delta_1, \Delta_2), (\forall s \in \mathbf{Z}) f(\text{Fil}^s \Delta_1) \subseteq \text{Fil}^{s+r} \Delta_2\}$ pour $r \in \mathbf{Z}$ (cf. [17]). On a alors $Gr^r \mathbf{Hom}(\Delta_1, \Delta_2) \simeq \bigoplus_{s \in \mathbf{Z}} \text{Hom}_{R[p^{-1}]}(Gr^s \Delta_1, Gr^{s+r} \Delta_2)$ car $Gr^\bullet \Delta_1$ et $Gr^\bullet \Delta_2$ sont projectifs sur $R[p^{-1}]$.

Avec les structures qui précèdent, $\mathbf{MF}_R(\nabla)$ est une catégorie tensorielle additive (cf. [19]).

Pour $n \in \mathbf{Z}$, on pose $\mathbf{1}(n) = (R[p^{-1}], d)$ muni de la filtration définie par $\text{Fil}^r \mathbf{1}(n) = \mathbf{1}(n)$ si $r \leq -n$ et $\text{Fil}^r \mathbf{1}(n) = 0$ si $r > -n$. Si Δ est un ∇ -module filtré sur $R[p^{-1}]$, on note $\Delta(n) = \Delta \otimes \mathbf{1}(n)$ (n -ième twist à la Tate) et $\Delta^\vee = \mathbf{Hom}(\Delta, \mathbf{1})$ (dual de Δ).

Définition 7.1.18. — Soit Δ un ∇ -module filtré sur $R[p^{-1}]$ de rang h . Le $R[p^{-1}]$ -module $\bigwedge^h \Delta$ est alors projectif de rang 1 et le gradué associé à sa filtration est projectif sur $R[p^{-1}]$. Il existe donc un entier r tel que $Gr^r \bigwedge^h \Delta \simeq \bigwedge^h \Delta$ et $Gr^s \bigwedge^h \Delta = 0$ si $s \neq r$. On note $t_H(\Delta)$ l'entier ainsi obtenu.

Remarque 7.1.19. — Si Δ est un ∇ -module filtré de rang h sur $R[p^{-1}]$ et n un entier rationnel, on a $t_H(D^\vee) = -t_H(D)$ et $t_H(D(n)) = t_H(D) - nh$. En effet, en prenant la puissance extérieure h -ième, il suffit de le voir dans le cas où $h = 1$, cas dans lequel les égalités sont évidentes.

Proposition 7.1.20. — La fonction t_H est additive.

Démonstration. — Soit $0 \rightarrow \Delta' \rightarrow \Delta \rightarrow \Delta'' \rightarrow 0$ une suite exacte dans la catégorie $\mathbf{M}_R(\nabla)$. Notons h, h' et h'' les rangs de Δ, Δ' et Δ'' respectivement. On a $h = h' + h''$ et $\bigwedge^h \Delta \simeq (\bigwedge^{h'} \Delta') \otimes (\bigwedge^{h''} \Delta'')$ et donc $t_H(\Delta) = t_H(\Delta') + t_H(\Delta'')$. \square

Remarque 7.1.21. — Soit Δ un ∇ -module filtré sur $R[p^{-1}]$, alors $t_H(\Delta) = \sum_{r \in \mathbf{Z}} r \text{rg}_R(Gr^r \Delta)$. En effet, comme le gradué $Gr^\bullet \Delta$ est projectif, le $R[p^{-1}]$ -module filtré Δ est isomorphe (non canoniquement en général) à $\bigoplus_{r \in \mathbf{Z}} Gr^r \Delta$, la filtration sur le membre de gauche étant donnée par $\text{Fil}^s(\bigoplus_{r \in \mathbf{Z}} Gr^r \Delta) = \bigoplus_{r \leq s} Gr^r \Delta$ pour $s \in \mathbf{Z}$. Par additivité de t_H (proposition 7.1.20), il suffit de vérifier la formule pour le $R[p^{-1}]$ -module filtré $Gr^r \Delta$ donné par $\text{Fil}^s Gr^r \Delta = Gr^r \Delta$ si $s \leq r$ et $\text{Fil}^s Gr^r \Delta = 0$ si $s > r$, cas dans lequel elle est évidente.

7.1.3. (φ, ∇) -modules filtrés. —

Définition 7.1.22. — Un (φ, ∇) -module filtré sur $R[p^{-1}]$ relativement à $R_0[p^{-1}]$ est la donnée d'un (φ, ∇) -module D sur $R_0[p^{-1}]$, et d'une filtration sur $D_R := D \otimes_{R_0[p^{-1}]} R[p^{-1}]$ faisant de ce dernier un ∇ -module filtré sur $R[p^{-1}]$ (la connexion sur D_R est la connexion induite par celle de D). Un morphisme de (φ, ∇) -modules filtrés $f: D \rightarrow D'$ est un morphisme entre les (φ, ∇) -modules sous-jacents tel que $f_R: D_R \rightarrow D'_R$ est morphisme de ∇ -modules filtrés sur $R[p^{-1}]$. On obtient ainsi une catégorie tensorielle additive \mathbf{Q}_p -linéaire, notée $\mathbf{MF}_{R/R_0}(\varphi, \nabla)$. Si aucune confusion n'en résulte, on parlera simplement de modules filtrés sur $R[p^{-1}]$.

Remarque 7.1.23. — En vertu de la remarque 7.1.12, la catégorie $\mathbf{MF}_{R/R_0}(\varphi, \nabla)$ est donc équivalente à la catégorie des F -isocristaux D sur R_0/pR_0 tels que l'évaluation en l'objet-test $(R, pR, \gamma, R_0/pR_0 \rightarrow R/pR)$ est munie d'une filtration décroissante séparée exhaustive vérifiant la transversalité de Griffith et ayant un gradué projectif.

Dans le cas où la condition (BR) est remplie, on a vu plus haut que la catégorie des F -isocristaux sur R_0/pR_0 et celle des F -isocristaux sur $R/\varpi R$ sont équivalentes. Dans ce cas, la catégorie $\mathbf{MF}_{R/R_0}(\varphi, \nabla)$ ne dépend donc pas, à équivalence près, de R_0 , mais seulement de R .

Définition 7.1.24. — Un (φ, ∇) -module filtré D sur $R[p^{-1}]$ relativement à $R_0[p^{-1}]$ est dit *ponctuellement faiblement admissible* si pour tout $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R_0/pR_0)$, les conditions suivantes sont remplies :

- (1) $t_H(D) = t_N(D, \mathfrak{p})$;
- (2) pour tout sous-objet D' de D (dans la catégorie $\mathbf{MF}_{R/R_0}(\varphi, \nabla)$), on a $t_H(D') \leq t_N(D', \mathfrak{p})$.

On note $\mathbf{MF}_{R/R_0}^{\text{pfa}}(\varphi, \nabla)$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{MF}_{R/R_0}(\varphi, \nabla)$ constituée des (φ, ∇) -modules filtrés sur $R[p^{-1}]$ relativement à $R_0[p^{-1}]$ qui sont ponctuellement faiblement admissibles.

Remarque 7.1.25. — Comme $\mathfrak{p} \mapsto t_N(D', \mathfrak{p})$ augmente par spécialisation, la condition (2) se vérifie au point générique de R_0/pR_0 .

7.2. Changement de Frobenius

Soient σ_1, σ_2 deux relèvements à R_0 du Frobenius $R_0/pR_0 \rightarrow R_0/pR_0$. Pour $j \in \{1, 2\}$, notons $\mathbf{MF}_{R/R_0, \sigma_j}(\varphi, \nabla)$ et $\mathbf{MF}_{R/R_0, \sigma_j}^{\text{fa}}(\varphi, \nabla)$ les catégories correspondantes quand l'anneau $R_0[p^{-1}]$ est muni du Frobenius σ_j . Comme $\mathbf{MF}_{R/R_0, \sigma_1}(\varphi, \nabla)$ et $\mathbf{MF}_{R/R_0, \sigma_2}(\varphi, \nabla)$ sont équivalentes à la catégorie des F -isocristaux sur R_0/pR_0 ayant une filtration décroissante séparée exhaustive vérifiant la transversalité de Griffith et ayant un gradué projectif en R : elles sont équivalentes. Dans ce qui suit, on va expliciter cette équivalence.

Proposition 7.2.1. — *Avec les notations qui précèdent, on a*

$$(*) \quad \sigma_2 = \sum_{\underline{n} \in \mathbf{N}^d} \left(\prod_{i=1}^d (\sigma_2(T_i) - \sigma_1(T_i))^{[n_i]} \right) \sigma_1 \circ \left(\prod_{i=1}^d \left(\frac{N_i}{T_i} \right)^{n_i} \right)$$

sur R_0 .

Remarque 7.2.2. — Comme $\sigma_2(T_i) - \sigma_1(T_i) \in pR_0$, on a $(\sigma_2(T_i) - \sigma_1(T_i))^{[n_i]} \in R_0$ pour tout $n_i \in \mathbf{N}$. Par ailleurs, $\prod_{i=1}^d N_i^{p_i}$ envoie R_0 dans pR_0 . Le terme général de $(*)$ tend vers 0 selon le filtre complémentaire des parties finies de \mathbf{N}^d : la série $(*)$ est donc convergente sur R_0 .

Démonstration. — Posons $\sigma = \sum_{\underline{n} \in \mathbf{N}^d} \left(\prod_{i=1}^d (\sigma_2(T_i) - \sigma_1(T_i))^{[n_i]} \right) \sigma_1 \circ \left(\prod_{i=1}^d \left(\frac{N_i}{T_i} \right)^{n_i} \right)$. On a $(\sigma_2(T_i) - \sigma_1(T_i))^{[n_i]} \in pR_0$ si $\underline{n} \neq \underline{0}$. Comme les réductions de σ_1 et σ_2 sont égales, $\sigma - \sigma_2$ est à valeurs dans pR_0 . Par ailleurs, on a $\left(\prod_{i=1}^d \left(\frac{N_i}{T_i} \right)^{n_i} \right) (T_j) = 0$ s'il existe $i \neq j$ avec $n_i \neq 0$ ou si $n_j > 1$: on a $\sigma(T_j) = \sigma_1(T_j) + (\sigma_2(T_j) - \sigma_1(T_j))$ donc $\sigma - \sigma_2$ est nul sur $W\{T_1^{\pm 1}, \dots, T_d^{\pm 1}\}$. Comme R_0 est déduit de $W\{T_1^{\pm 1}, \dots, T_d^{\pm 1}\}$ en itérant les opérations (ét), (loc) et (comp) : il existe une suite

$$W\{T_1^{\pm 1}, \dots, T_d^{\pm 1}\} = R_0^{(0)} \subseteq R_0^{(1)} \subseteq \dots \subseteq R_0^{(N)} = R_0$$

de sous- $W\{T_1^{\pm 1}, \dots, T_d^{\pm 1}\}$ -algèbres fermées de \tilde{R} telles que pour tout $j \in \{1, \dots, N\}$, l'extension $R_0^{(j-1)} \subseteq R_0^{(j)}$ est du type (ét), (loc) ou (comp). Si $\sigma = \sigma_2$ sur $R_0^{(j-1)}$, alors il en est de même sur $R_0^{(j)}$. Dans le cas d'une extension de type (ét), cela se voit modulo p^r pour tout $r \in \mathbf{N}_{>0}$: comme $R_0^{(j-1)}/p^r R_0^{(j-1)} \rightarrow R_0^{(j)}/p^r R_0^{(j)}$ est étale, la flèche en pointillé rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} R_0^{(j)}/p^r R_0^{(j)} & \xrightarrow{\sigma_2 \text{ mod } pR_0} & R_0/pR_0 \\ \uparrow & \searrow \sigma & \uparrow \\ R_0^{(j-1)}/p^r R_0^{(j-1)} & \xrightarrow{\sigma_2} & R_0/p^r R_0 \end{array}$$

est unique. Ainsi $\sigma = \sigma_2$. □

Proposition 7.2.3. — *(Changement de Frobenius) Le foncteur $F_{\sigma_1, \sigma_2} : \mathbf{MF}_{R/R_0, \sigma_1}(\varphi, \nabla) \rightarrow \mathbf{MF}_{R/R_0, \sigma_2}(\varphi, \nabla)$ qui à $D = (D, \varphi_1, \nabla, \text{Fil})$ associe $F_{\sigma_1, \sigma_2}(D) = (D, \varphi_2, \nabla, \text{Fil})$ où φ_2 est donné par la formule*

$$(*) \quad \varphi_2 = \sum_{\underline{n} \in \mathbf{N}^d} \left(\prod_{i=1}^d (\sigma_2(T_i) - \sigma_1(T_i))^{[n_i]} \right) \varphi_1 \circ \left(\prod_{i=1}^d \left(\frac{N_i}{T_i} \right)^{n_i} \right)$$

est un isomorphisme de catégories, qui induit un isomorphisme $\mathbf{MF}_{R/R_0, \sigma_1}^{\text{pfa}}(\varphi, \nabla) \xrightarrow{\sim} \mathbf{MF}_{R/R_0, \sigma_2}^{\text{pfa}}(\varphi, \nabla)$.

Remarque 7.2.4. — Comme ∇ est quasi-nilpotente, il existe un sous- R_0 -module \mathcal{D} de D qui est de type fini, séparé et complet pour la topologie p -adique, tel que $D = \mathcal{D}[p^{-1}]$ et des entiers e_1, \dots, e_d tels que $\prod_{i=1}^d N_i^{pe_i}$ envoie \mathcal{D} dans $p\mathcal{D}$. Si $x \in \mathcal{D}$, la suite $\left\{ \left(\prod_{i=1}^d \left(\frac{N_i}{T_i} \right)^{n_i} \right) (x) \right\}_{\underline{n} \in \mathbf{N}^d}$ tend vers 0 selon le filtre complémentaire des parties finies de \mathbf{N}^d : la série $(*)$ est donc convergente sur \mathcal{D} .

Démonstration. — • Montrons que si $D \in \mathbf{MF}_{R/R_0, \sigma_1}(\varphi, \nabla)$, alors $F_{\sigma_1, \sigma_2}(D) \in \mathbf{MF}_{R/R_0, \sigma_2}(\varphi, \nabla)$.

Semi-linéarité du Frobenius : si $x \in D$ et $\lambda \in R_0[p^{-1}]$, on a, pour $\underline{m} \in \mathbf{N}^d$ l'égalité $\left(\prod_{i=1}^d \left(\frac{N_i}{T_i}\right)^{m_i}\right)(\lambda x) = \sum_{\underline{0} \leq \underline{n} \leq \underline{m}} \frac{m!}{n!(m-n)!} \left(\prod_{i=1}^d \left(\frac{N_i}{T_i}\right)^{m_i-n_i}\right)(\lambda) \left(\prod_{i=1}^d \left(\frac{N_i}{T_i}\right)^{n_i}\right)(x)$. Le coefficient de $\left(\prod_{i=1}^d \left(\frac{N_i}{T_i}\right)^{n_i}\right)(x)$ dans l'expression (*) donnant $\varphi_2(\lambda x)$ est donc $\sum_{\underline{m} \geq \underline{n}} \frac{m!}{n!(m-n)!} \left(\prod_{i=1}^d (\sigma_1(T_i) - \sigma_2(T_i))^{[m_i]}\right) \left(\prod_{i=1}^d \left(\frac{N_i}{T_i}\right)^{m_i-n_i}\right)(\lambda)$ soit encore $\left(\prod_{i=1}^d (\sigma_1(T_i) - \sigma_2(T_i))^{[n_i]}\right) \sum_{\underline{m} \geq \underline{n}} \left(\prod_{i=1}^d (\sigma_1(T_i) - \sigma_2(T_i))^{[m_i-n_i]}\right) \left(\prod_{i=1}^d \left(\frac{N_i}{T_i}\right)^{m_i-n_i}\right)(\lambda)$, qui est égal, d'après la proposition 7.2.1 à $\left(\prod_{i=1}^d (\sigma_1(T_i) - \sigma_2(T_i))^{[n_i]}\right) \sigma_2(\lambda)$. On a donc $\varphi_2(\lambda x) = \sigma_2(\lambda) \varphi_2(x)$.

Montrons que φ_2 commute à la connexion. On a $\nabla \varphi_2 = u + v$ avec

$$u = \sum_{\underline{n} \in \mathbf{N}^d} \sum_{j=1}^d \left(\prod_{i=1}^d (\sigma_1(T_i) - \sigma_2(T_i))^{[n_i - \delta_{i,j}]}\right) \varphi_1 \circ \left(\prod_{i=1}^d \left(\frac{N_i}{T_i}\right)^{n_i}\right) \otimes d(\sigma_2(T_j) - \sigma_1(T_j))$$

$$\begin{aligned} v &= \sum_{\underline{n} \in \mathbf{N}^d} \left(\prod_{i=1}^d (\sigma_1(T_i) - \sigma_2(T_i))^{[n_i]}\right) \varphi_1 \circ \nabla \circ \left(\prod_{i=1}^d \left(\frac{N_i}{T_i}\right)^{n_i}\right) \\ &= \sum_{\underline{n} \in \mathbf{N}^d} \left(\prod_{i=1}^d (\sigma_1(T_i) - \sigma_2(T_i))^{[n_i]}\right) \varphi_1 \circ \left(\sum_{j=1}^d \left(\prod_{i=1}^d \left(\frac{N_i}{T_i}\right)^{n_i + \delta_{i,j}}\right) \otimes dT_j\right) \end{aligned}$$

car φ_1 commute à ∇ . On a alors $u = \sum_{j=1}^d \varphi_2 \circ \left(\frac{N_j}{T_j}\right) \otimes d(\sigma_2(T_j) - \sigma_1(T_j))$ et $v = \sum_{j=1}^d \varphi_2 \circ \left(\frac{N_j}{T_j}\right) \otimes d\sigma_1(T_j)$. On a bien $\nabla \varphi_2 = \sum_{j=1}^d \varphi_2 \circ \left(\frac{N_j}{T_j}\right) \otimes d\sigma_2(T_j) = \varphi_2 \nabla$.

Montrons que l'on a $F_{\sigma_2, \sigma_1} \circ F_{\sigma_1, \sigma_2} = \text{Id}_{\mathbf{MF}_{R/R_0, \sigma_1}(\varphi, \nabla)}$. Soit $D \in \mathbf{MF}_{R/R_0, \sigma_1}$ et

$$\varphi_3 = \sum_{\underline{n} \in \mathbf{N}^d} \left(\prod_{i=1}^d (\sigma_1(T_i) - \sigma_2(T_i))^{[n_i]}\right) \varphi_2 \circ \left(\prod_{i=1}^d \left(\frac{N_i}{T_i}\right)^{n_i}\right)$$

le Frobenius sur $F_{\sigma_2, \sigma_1} \circ F_{\sigma_1, \sigma_2}(D)$. Il s'agit de voir que $\varphi_3 = \varphi_1$. Par définition de $\varphi_2 = F_{\sigma_1, \sigma_2}(\varphi_1)$, on a

$$\varphi_3 = \sum_{\underline{n}, \underline{m} \in \mathbf{N}^d} \left(\prod_{i=1}^d (\sigma_1(T_i) - \sigma_2(T_i))^{[n_i]}\right) (\sigma_2(T_i) - \sigma_1(T_i))^{[m_i]} \varphi_1 \circ \left(\prod_{i=1}^d \left(\frac{N_i}{T_i}\right)^{m_i + n_i}\right).$$

Si $\underline{\nu} \in \mathbf{N}^d$, le coefficient de $\varphi_1 \circ \left(\prod_{i=1}^d \left(\frac{N_i}{T_i}\right)^{\nu_i}\right)$ est donc $\sum_{\underline{n} + \underline{m} = \underline{\nu}} \prod_{i=1}^d (\sigma_1(T_i) - \sigma_2(T_i))^{[n_i]} (\sigma_2(T_i) - \sigma_1(T_i))^{[m_i]} = \prod_{i=1}^d (\sigma_1(T_i) - \sigma_2(T_i) + \sigma_2(T_i) - \sigma_1(T_i))^{\nu_i}$. Ce coefficient est donc nul dès que $\underline{\nu} \neq \underline{0}$ et vaut 1 sinon. On a bien $\varphi_3 = \varphi_1$.

Il en résulte que $\varphi_2(D)$ engendre le $R_0[p^{-1}]$ -module D . En effet, on a $D = R_0[p^{-1}]\varphi_3(D) \subset R_0[p^{-1}]\varphi_2(D) \subseteq D$ donc $R_0[p^{-1}]\varphi_2(D) = D$.

Ce qui précède montre que le foncteur F_{σ_1, σ_2} est à valeurs dans $\mathbf{MF}_{R/R_0, \sigma_2}(\varphi, \nabla)$ et que c'est un isomorphisme, d'inverse F_{σ_2, σ_1} .

• Montrons que F_{σ_1, σ_2} induit un isomorphisme entre les catégories $\mathbf{MF}_{R/R_0, \sigma_1}^{\text{pfa}}(\varphi, \nabla)$ et $\mathbf{MF}_{R/R_0, \sigma_2}^{\text{pfa}}(\varphi, \nabla)$. Il s'agit de montrer que la faible admissibilité ponctuelle est conservée quand on change de Frobenius. Cette dernière se teste sur les objets-test de la forme $W(\kappa)$ où κ est un corps parfait, on peut supposer que R_0 est local. Il suffit alors de prouver que si $D \in \mathbf{MF}_{R/R_0}(\varphi, \nabla)$, l'entier $t_N(D)$ ne dépend pas du relèvement du Frobenius choisi. Comme D est projectif sur $R_0[p^{-1}]$ et R_0 local, D est libre. Quitte à remplacer D par sa puissance extérieure maximale, on peut supposer D de rang 1. On a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} D_{(W(\kappa), p W(\kappa), \gamma, s \circ \sigma_1)} & \xrightarrow{\tilde{\varphi}_1} & D_{(W(\kappa), p W(\kappa), \gamma, s)} \\ \parallel & & \parallel \\ D_{(W(\kappa), p W(\kappa), \gamma, s \circ \sigma_2)} & \xrightarrow{\tilde{\varphi}_2} & D_{(W(\kappa), p W(\kappa), \gamma, s)} \end{array}$$

où l'égalité provient du fait que σ_1 et σ_2 sont égaux modulo p . On a alors $D \simeq R_0[p^{-1}]x$ avec $\varphi_1(x) = \lambda_1 x$ et $\varphi_2(x) = \lambda_2 x$ où $\lambda_1, \lambda_2 \in R_0[p^{-1}]$. Si $x \in R_0[p^{-1}]$, notons \bar{x} son image dans le corps $W(\kappa)[p^{-1}]$ par le plongement

défini par σ_1 . Les entiers $t_N(D)$ relatifs à σ_1 et σ_2 sont respectivement $v(\overline{\lambda_1})$ et $v(\overline{\lambda_2})$. Par ailleurs, pour tout $\underline{n} \in \mathbf{N}^d$, on a $k_{\underline{n}} \in R_0[p^{-1}]$ tel que $\prod_{i=1}^d \left(\frac{N_i}{T_i}\right)^{n_i}(x) = k_{\underline{n}}x$. L'égalité (*) se traduit alors par

$$\lambda_2 = \lambda_1 \left(\sum_{\underline{n} \in \mathbf{N}^d} \left(\prod_{i=1}^d (\sigma_1(T_i) - \sigma_2(T_i))^{[n_i]} \right) \sigma_1(k_{\underline{n}}) \right).$$

Pour tout $\underline{n} \in \mathbf{N}^d$, l'élément $\prod_{i=1}^d (\sigma_1(T_i) - \sigma_2(T_i))^{[n_i]}$ appartient à l'idéal à puissances divisées pR_0 (car σ_1 et σ_2 ont même réduction modulo pR_0). Pour montrer que $\overline{\lambda_1}$ et $\overline{\lambda_2}$ ont même valuation p -adique dans $W(\kappa)[p^{-1}]$, il suffit donc de montrer que $v(\overline{\sigma_1(k_{\underline{n}})}) \geq 0$ i.e. que $v(\overline{k_{\underline{n}}}) \geq 0$ pour tout \underline{n} (ce qui implique que $\overline{\lambda_2} \in \overline{\lambda_1}(1 + pW(\kappa))$).

Notons que pour $i \in \{1, \dots, d\}$ et $\underline{n} \in \mathbf{N}^d$, on a $k_{\underline{n} + \underline{e}_i} x = \frac{N_i}{T_i}(k_{\underline{n}}x) = \frac{N_i}{T_i}(k_{\underline{n}})x + k_{\underline{n}} \frac{N_i}{T_i}(x)$ et donc $k_{\underline{n} + \underline{e}_i} = \frac{N_i}{T_i}(k_{\underline{n}}) + k_{\underline{n}} k_{\underline{e}_i}$ (où $\underline{e}_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, le 1 en i -ème position). Comme R_0 est stable par $\frac{N_i}{T_i}$, une récurrence évidente montre qu'il suffit de prouver que $v(\overline{k_{\underline{e}_i}}) \in R_0$ pour $i \in \{1, \dots, d\}$. Notons k_i pour $k_{\underline{e}_i}$. Comme $\varphi_1 \nabla = \nabla \varphi_1$, on a $\varphi_1 \left(\sum_{i=1}^d N_i(x) \otimes d \log(T_i) \right) = \sum_{i=1}^d N_i(\varphi_1(x)) \otimes d \log(T_i)$ donc

$$\sum_{i=1}^d \sigma_1(k_i) \lambda_1 x \otimes \sigma_1(d \log(T_i)) = \sum_{i=1}^d (N_i(\lambda_1) + \lambda_1 k_i) x \otimes d \log(T_i).$$

On a $\sigma_1(d \log(T_i)) \equiv 0 \pmod{p\widehat{\Omega}_{R_0}^1}$: écrivons $\sigma_1(d \log(T_i)) = p \sum_{j=1}^d \theta_{ij} d \log(T_j)$, avec $\{\theta_{ij}\}_{1 \leq i, j \leq d} \in R_0^{d^2}$. On

a alors $N_i(\lambda_1) = \lambda_1 \left(-k_i + p \sum_{j=1}^d \sigma_1(k_j) \theta_{ji} \right)$. Posons $s = \min_{1 \leq i \leq d} v(\overline{k_i}) \in \mathbf{Z} \cup \{\infty\}$. Soit $i_0 \in \{1, \dots, d\}$ tel que $v(\overline{k_{i_0}}) = s$. On a donc $v\left(-\overline{k_{i_0}} + p \sum_{j=1}^d \overline{\sigma_1(k_j) \theta_{ji_0}}\right) = v(\overline{k_{i_0}})$ d'où $v(\overline{\lambda_1}) \leq v(\overline{N_{i_0}(\lambda_1)}) = v(\overline{\lambda_1}) + v(\overline{k_{i_0}})$ soit $s \geq 0$ i.e. $v(k_i) \geq 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$, ce qu'on voulait. \square

CHAPITRE 8

REPRÉSENTATIONS p -ADIQUES

Définition 8.0.5. — Une *représentation p -adique* de \mathcal{G}_R est un \mathbf{Q}_p -espace vectoriel de dimension finie muni d'une action linéaire continue de \mathcal{G}_R . Ces dernières forment une catégorie tannakienne \mathbf{Q}_p -linéaire qu'on note $\mathbf{Rep}_{\mathbf{Q}_p}(\mathcal{G}_R)$.

Dans ce qui suit, on utilisera le langage et les résultats de [10, 3.1]. Rappelons en particulier que si B est une \mathbf{Q}_p -algèbre topologique munie d'une action de \mathcal{G}_R et $V \in \mathbf{Rep}_{\mathbf{Q}_p}(\mathcal{G}_R)$, on pose $D_B(V) = (B \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\mathcal{G}_R}$. On dispose alors d'un homomorphisme B -linéaire $\alpha_B(V) : B \otimes_{B^{\mathcal{G}_R}} D_B(V) \rightarrow B \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$, et on dit que V est B -admissible, si ce dernier est un isomorphisme. La sous-catégorie pleine de $\mathbf{Rep}_{\mathbf{Q}_p}(\mathcal{G}_R)$ constituée des représentations B -admissibles est notée $\mathbf{Rep}_{B\text{-adm}}(\mathcal{G}_R)$.

8.1. Représentations discrètes, représentations non ramifiées

Proposition 8.1.1. — (a) Une représentation p -adique V de \mathcal{G}_R est discrète (i.e. le noyau de l'action de \mathcal{G}_R sur V est un sous-groupe ouvert de \mathcal{G}_R) si et seulement si V est $\overline{R}[p^{-1}]$ -admissible.

(b) La sous-catégorie pleine de $\mathbf{Rep}_{\mathbf{Q}_p}(\mathcal{G}_R)$ constituée des représentations discrètes est tannakienne, et la restriction du foncteur $D_{\overline{R}[p^{-1}]} : \mathbf{Rep}_{\mathbf{Q}_p}(\mathcal{G}_R) \rightarrow \mathbf{Mod}(R[p^{-1}])$, qui à V associe $(\overline{R}[p^{-1}] \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\mathcal{G}_R}$, est un foncteur fibre.

Démonstration. — (a) Supposons que la représentation V est $\overline{R}[p^{-1}]$ -admissible. L'anneau $\overline{R}[p^{-1}]$ est fidèlement plat sur $R[p^{-1}]$ (il est limite inductive filtrante de $R[p^{-1}]$ -algèbres finies étales), et l'anneau $(\overline{R}[p^{-1}])^{\mathcal{G}_R} = R[p^{-1}]$ est noethérien : [10, Proposition 3.1.4] implique que $D_{\overline{R}[p^{-1}]}(V)$ est un $R[p^{-1}]$ -module projectif de type fini. En particulier, il existe une sous- R -algèbre finie S de \overline{R} telle que $S[p^{-1}]/R[p^{-1}]$ est étale et $D_{\overline{R}[p^{-1}]}(V) = (\overline{R}[p^{-1}] \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\mathcal{G}_R}$ est engendré par des éléments de $S[p^{-1}] \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$. Quitte à remplacer S par une sous- R -algèbre de \overline{R} plus grande, on peut supposer $S[p^{-1}]/R[p^{-1}]$ galoisienne. Le groupe \mathcal{G}_S est un sous-groupe ouvert invariant de \mathcal{G}_R . On a alors $\overline{R}[p^{-1}] \otimes_{R[p^{-1}]} D_{\overline{R}[p^{-1}]}(V) = \overline{R}[p^{-1}] \otimes_{R[p^{-1}]} (S[p^{-1}] \otimes_{\mathbf{Q}_p} V^{\mathcal{G}_S})^{\mathcal{G}_{S/R}}$ où $\mathcal{G}_{S/R} = \text{Gal}(S[p^{-1}]/R[p^{-1}])$, et donc $\overline{R}[p^{-1}] \otimes_{\mathbf{Q}_p} V \subseteq \overline{R}[p^{-1}] \otimes_{\mathbf{Q}_p} V^{\mathcal{G}_S}$. Ainsi $V = V^{\mathcal{G}_S}$ et le noyau de l'action de \mathcal{G}_R sur V est un sous-groupe ouvert de \mathcal{G}_R .

Réciproquement, si l'action de \mathcal{G}_R est discrète, son noyau est un sous-groupe ouvert invariant G de \mathcal{G}_R . Soit $S[p^{-1}] = (\overline{R}[p^{-1}])^G$. C'est un revêtement étale galoisien de $R[p^{-1}]$ de groupe $J = \mathcal{G}_R/G$. Il suffit de voir que l'homomorphisme naturel $S[p^{-1}] \otimes_{R[p^{-1}]} (S[p^{-1}] \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^J \rightarrow S[p^{-1}] \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$ est bijectif. Cela résulte de la descente fidèlement plate (cf. [18, Arcata Théorème 4.5]).

(b) La \mathbf{Q}_p -algèbre $\overline{R}[p^{-1}]$ vérifie les conditions (i), (ii) ([10, Proposition 3.1.3]) et (iii) de *loc. cit.* définition 3.1.8, et la condition (iv) d'après l'équivalence du (a), vu que la catégorie des représentations discrètes est stable par dual. L'énoncé en résulte. \square

Notation. On pose $J_R = \pi_1(\text{Spec}(R), \text{Spec}(E_R)) = \text{Gal}(R^{\text{nr}}/R)$, c'est un quotient de \mathcal{G}_R .

Définition 8.1.2. — Une représentation p -adique $\rho : \mathcal{G}_R \rightarrow \text{GL}(V)$ est dite *non ramifiée* (resp. R_0 -non ramifiée) si ρ se factorise par $\mathcal{G}_R \rightarrow J_R$ (resp. par $\mathcal{G}_R \rightarrow J_{R_0}$).

Bien sûr, une représentation R_0 -non ramifiée est non ramifiée, et les deux notions coïncident lorsque la condition (BR) est remplie. Rappelons (proposition 5.2.4) que $\widehat{R^{\text{nr}}}[p^{-1}]$ (resp. $\widehat{R_0^{\text{nr}}}[p^{-1}]$) est un sous-anneau de B_{dR}^+ (resp. de

B_{cris}^+). On a donc $H^0(\mathcal{G}_R, \widehat{R^{\text{nr}}}[p^{-1}]) = R[p^{-1}]$ (cf. proposition 5.2.12). Il en résulte que $H^0(\mathcal{G}_R, \widehat{R_0^{\text{nr}}}[p^{-1}]) = R_0'[p^{-1}]$ où R_0' est une sous- R_0 -algèbre étale de R (qui coïncide avec R_0 lorsque la condition (BR) est remplie, en vertu de la proposition 6.2.9). Si V est une représentation p -adique, on pose $D_{\text{nr}}(V) = (\widehat{R^{\text{nr}}}[p^{-1}] \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\mathcal{G}_R}$ (resp. $D_{\text{nr}}^0(V) = (\widehat{R_0^{\text{nr}}}[p^{-1}] \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\mathcal{G}_R}$). C'est un $R[p^{-1}]$ -module (resp. un $R_0'[p^{-1}]$ -module) et on a des homomorphismes $\alpha_{\text{nr}}(V): \widehat{R^{\text{nr}}}[p^{-1}] \otimes_{R[p^{-1}]} D_{\text{nr}}(V) \rightarrow \widehat{R^{\text{nr}}}[p^{-1}] \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$ (resp. $\alpha_{\text{nr}}^0(V): \widehat{R_0^{\text{nr}}}[p^{-1}] \otimes_{R_0'[p^{-1}]} D_{\text{nr}}^0(V) \rightarrow \widehat{R_0^{\text{nr}}}[p^{-1}] \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$).

Proposition 8.1.3. — *Soit V une représentation p -adique de \mathcal{G}_R . Alors V est non ramifiée (resp. R_0 -non ramifiée) si et seulement si V est $\widehat{R^{\text{nr}}}[p^{-1}]$ -admissible (resp. $\widehat{R_0^{\text{nr}}}[p^{-1}]$ -admissible), i.e. si et seulement si l'application $\alpha_{\text{nr}}(V)$ (resp. $\alpha_{\text{nr}}^0(V)$) est bijective.*

Démonstration. — • Supposons V non ramifiée, et montrons qu'elle est $\widehat{R^{\text{nr}}}[p^{-1}]$ -admissible. Soit \mathcal{V} un réseau de V stable par J_R (il en existe car J_R est compact). Si l'on choisit une base de \mathcal{V} sur \mathbf{Z}_p , l'action de J_R est décrite par un morphisme $J_R \rightarrow \text{GL}_n(\mathbf{Z}_p)$, où $n = \dim(V)$. Cela fournit un cocycle continu $f: J_R \rightarrow \text{GL}_n(\widehat{R^{\text{nr}}})$, qui décrit l'action de J_R sur $\widehat{R^{\text{nr}}} \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathcal{V}$. Montrons que ce dernier est trivial.

Montrons d'abord que f est cohomologue à un cocycle qui se factorise par un quotient fini. Comme f est continu, il existe un sous-groupe distingué ouvert J_f de J_R tel que pour tout $g \in J_f$, on a $f(g) \in 1 + pM_n(\widehat{R^{\text{nr}}})$. On procède par approximations successives. On construit par récurrence des suites $(b_m)_{m \in \mathbf{N}}$, $(f_m)_{m \in \mathbf{N}}$ telles que pour tout $m \in \mathbf{N}$:

- (a) $b_m \in 1 + p^m M_n(\widehat{R^{\text{nr}}})$;
- (b) $f_m: J_R \rightarrow \text{GL}_n(\widehat{R^{\text{nr}}})$ est un cocycle;
- (c) $f_m(g) \in 1 + p^{m+1} M_n(\widehat{R^{\text{nr}}})$ pour tout $g \in J_f$;
- (d) $f_{m+1}(g) = g(b_{m+1}^{-1})f_m(g)b_{m+1}$ pour tout $g \in J_R$.

Posons $b_0 = 1 \in M_n(\widehat{R^{\text{nr}}})$ et $f_0 = f$. Supposons f_m est construit, il induit un cocycle additif $\overline{f}_m: J_f \rightarrow (1 + p^{m+1} M_n(\widehat{R^{\text{nr}}})) / (1 + p^{m+2} M_n(\widehat{R^{\text{nr}}})) \simeq M_n(\widehat{R^{\text{nr}}} / pR^{\text{nr}})$. Par continuité de f , il existe un sous-groupe distingué ouvert $J_{f,m}$ de J_f tel que \overline{f}_m se factorise par $J_{f,m}$. Comme R est séparé et complet pour la topologie p -adique, le foncteur $S \mapsto S/pS$ est une équivalence de catégories entre la catégorie des R -algèbres finies étales et la catégorie des R/pR -algèbres finies étales ([34, Théorème 18.3.4]). Le théorème de Hilbert 90 affirme donc que $H^1(J_R/J_{f,m}, (R^{\text{nr}}/pR^{\text{nr}})^{J_{f,m}}) = \{0\}$ (surjectivité de la trace pour les revêtements étales). Il existe donc $b_{m+1} \in 1 + p^{m+1} M_n(\widehat{R^{\text{nr}}})$ tel que $f_{m+1}(g) = g(b_{m+1}^{-1})f_m(g)b_{m+1} \in 1 + p^{m+2} M_n(\widehat{R^{\text{nr}}})$ pour tout $g \in J_f$.

Par construction, le produit infini $b = \prod_{m=1}^{\infty} b_m$ converge dans $1 + pM_n(\widehat{R^{\text{nr}}})$, et on a $g(b^{-1})f_m(g)b = 1$ pour tout $g \in J_f$ par continuité.

Soit alors $S = H^0(J_f, R^{\text{nr}})$. C'est une R -algèbre finie étale, et on a $H^0(J_f, \widehat{R^{\text{nr}}}[p^{-1}]) = S[p^{-1}]$. Soient e_1, \dots, e_n la base de $\widehat{R^{\text{nr}}}[p^{-1}] \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathcal{V}$ correspondant au (nouveau) cocycle $g \mapsto g(b^{-1})f_m(g)b$ et $\mathcal{D} = (\widehat{R^{\text{nr}}}[p^{-1}] \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathcal{V})^{J_f}$. Par construction, $\mathcal{D}[p^{-1}]$ est le $S[p^{-1}]$ -module libre de base e_1, \dots, e_n et l'application naturelle $\widehat{R^{\text{nr}}}[p^{-1}] \otimes_{S[p^{-1}]} \mathcal{D}[p^{-1}] \rightarrow \widehat{R^{\text{nr}}}[p^{-1}] \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$ est un isomorphisme. Posons $\overline{J} = J_R/J_f$. Il suffit de montrer que l'application naturelle $S[p^{-1}] \otimes_{R[p^{-1}]} (\mathcal{D}[p^{-1}])^{\overline{J}} \rightarrow \mathcal{D}[p^{-1}]$ est un isomorphisme, ce qui résulte de la descente étale. Le cas « R_0 -non ramifié » se traite de façon identique.

• Réciproquement, si V est une représentation p -adique $\widehat{R^{\text{nr}}}[p^{-1}]$ -admissible (resp. $\widehat{R_0^{\text{nr}}}[p^{-1}]$ -admissible), l'action de $I_R = \text{Ker}(\mathcal{G}_R \rightarrow J_R)$ (resp. de $I_{R_0} = \text{Ker}(\mathcal{G}_R \rightarrow J_{R_0})$) sur $\widehat{R^{\text{nr}}}[p^{-1}] \otimes_{\mathbf{Q}_p} V \simeq \widehat{R^{\text{nr}}}[p^{-1}] \otimes_{R[p^{-1}]} D_{\text{nr}}(V)$ (resp. sur $\widehat{R_0^{\text{nr}}}[p^{-1}] \otimes_{\mathbf{Q}_p} V \simeq \widehat{R_0^{\text{nr}}}[p^{-1}] \otimes_{R_0'[p^{-1}]} D_{\text{nr}}^0(V)$) est triviale. Elle est donc triviale sur V . \square

Proposition 8.1.4. — (i) *L'anneau $\widehat{R^{\text{nr}}}[p^{-1}]$ est fidèlement plat sur $R[p^{-1}]$, et l'anneau $\widehat{R_0^{\text{nr}}}[p^{-1}]$ est fidèlement plat sur $R_0'[p^{-1}]$.*

(ii) *Si $V \in \mathbf{Rep}_{\mathbf{Q}_p}(\mathcal{G}_R)$, l'homomorphisme $\alpha_{\text{nr}}(V): \widehat{R^{\text{nr}}}[p^{-1}] \otimes_{R[p^{-1}]} D_{\text{nr}}(V) \rightarrow \widehat{R^{\text{nr}}}[p^{-1}] \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$ (resp. $\alpha_{\text{nr}}^0(V): \widehat{R_0^{\text{nr}}}[p^{-1}] \otimes_{R_0'[p^{-1}]} D_{\text{nr}}^0(V) \rightarrow \widehat{R_0^{\text{nr}}}[p^{-1}] \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$) est injectif.*

(iii) *La sous-catégorie pleine de $\mathbf{Rep}_{\mathbf{Q}_p}(\mathcal{G}_R)$ constituée des représentations non ramifiées (resp. R_0 -non ramifiées) est une sous-catégorie tannakienne, et la restriction du foncteur D_{nr} (resp. D_{nr}^0) est un $R[p^{-1}]$ -foncteur fibre (resp. un $R_0'[p^{-1}]$ -foncteur fibre), à valeurs dans les $R[p^{-1}]$ -modules (resp. les $R_0'[p^{-1}]$ -modules) projectifs de type fini.*

Démonstration. — (i) L'anneau R^{nr} est limite inductive filtrante de R -algèbres étales donc plates. La R -algèbre R^{nr} est donc plate. Pour tout $n \in \mathbf{N}_{>0}$, l'anneau $R^{\text{nr}}/p^n R^{\text{nr}}$ est donc plat sur $R/p^n R$. Comme R est noethérien, et comme R et $\widehat{R^{\text{nr}}}$ sont complets pour la topologie p -adique, le critère local de platitude ([42, Theorem 22.3]) implique que $\widehat{R^{\text{nr}}}$ est plat sur R . Par ailleurs, on a les inclusions $R[p^{-1}] \subset \widehat{R^{\text{nr}}}[p^{-1}] \subset C$. D'après le théorème

3.2.3, l'anneau C est fidèle sur $R[p^{-1}]$, il en est donc de même de $\widehat{R}^{\text{nr}}[p^{-1}]$. On montre la fidélité platitude de $\widehat{R}_0^{\text{nr}}[p^{-1}]$ sur $R'_0[p^{-1}]$ de la même manière.

(ii) Posons $I_R = \text{Ker}(\mathcal{G}_R \rightarrow J_R)$ (resp. $I'_{R_0} = \text{Ker}(\mathcal{G}_R \rightarrow J_{R_0})$). Si $V \in \mathbf{Rep}_{\mathbf{Q}_p}(\mathcal{G}_R)$, alors V^{I_R} (resp. $V^{I'_{R_0}}$) est non ramifiée (resp. R_0 -non ramifiée), et $D_{\text{nr}}(V) = D_{\text{nr}}(V^{I_R})$ (resp. $D_{\text{nr}}^0(V) = D_{\text{nr}}^0(V^{I'_{R_0}})$). L'application $\alpha_{\text{nr}}(V)$ (resp. $\alpha_{\text{nr}}^0(V)$) est donc le composé de $\alpha_{\text{nr}}(V^{I_R})$ (resp. $\alpha_{\text{nr}}^0(V^{I'_{R_0}})$) et de l'inclusion $\widehat{R}^{\text{nr}}[p^{-1}] \otimes_{\mathbf{Q}_p} V^{I_R} \rightarrow \widehat{R}^{\text{nr}}[p^{-1}] \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$ (resp. $\widehat{R}_0^{\text{nr}}[p^{-1}] \otimes_{\mathbf{Q}_p} V^{I'_{R_0}} \rightarrow \widehat{R}_0^{\text{nr}}[p^{-1}] \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$). Son injectivité résulte donc de la proposition 8.1.3.

(iii) Il s'agit de vérifier la \mathcal{G}_R -régularité (cf. [10, Définition 3.8.1]) de $\widehat{R}^{\text{nr}}[p^{-1}]$ (resp. $\widehat{R}_0^{\text{nr}}[p^{-1}]$). Celle-ci résulte du (i), du (ii) et du fait que le dual d'une représentation non ramifiée (resp. R_0 -non ramifiée) l'est encore, et de la proposition 8.1.3. \square

Remarque 8.1.5. — Soit $V \in \mathbf{Rep}_{\mathbf{Q}_p}(\mathcal{G}_R)$. Avec les notations de la preuve qui précède, V^{I_R} (resp. $V^{I'_{R_0}}$) est non ramifiée (resp. R_0 -non ramifiée), et $D_{\text{nr}}(V) = D_{\text{nr}}(V^{I_R})$ (resp. $D_{\text{nr}}^0(V) = D_{\text{nr}}^0(V^{I'_{R_0}})$). D'après la proposition 8.1.4 qui précède, ce dernier est projectif de type fini sur $R[p^{-1}]$ (resp. $R'_0[p^{-1}]$) même si V est ramifiée.

Rappelons (section 3.3) qu'on a noté T l'ensemble des idéaux premiers de \overline{R} au-dessus de pR_0 . Si $\mathfrak{p} \in T$, on a noté $\mathcal{G}_R(\mathfrak{p})$ le sous-groupe de décomposition de \mathcal{G}_R en \mathfrak{p} , et $\widehat{G}_R(\mathfrak{p})$ le groupe de Galois absolu de $\widehat{R}_{\mathfrak{p}}[p^{-1}]$, où $\widehat{R}_{\mathfrak{p}}$ désigne le complété de $R_{\mathfrak{p} \cap R}$ et où la clôture algébrique choisie contient $\overline{R}_{\mathfrak{p}}$. On a un homomorphisme de restriction $r_{\mathfrak{p}}: \widehat{G}_R(\mathfrak{p}) \rightarrow \mathcal{G}_R$ dont l'image est précisément $\mathcal{G}_R(\mathfrak{p})$ (lemme 3.3.1).

Proposition 8.1.6. — *Le noyau I'_{R_0} de l'homomorphisme $\mathcal{G}_R \rightarrow J_{R_0}$ est engendré par les images de $I_{R_0}(\mathfrak{p}) \cap \widehat{G}_R(\mathfrak{p})$ par $r_{\mathfrak{p}}$ pour $\mathfrak{p} \in T$, où $I_{R_0}(\mathfrak{p})$ désigne le sous-groupe d'inertie de $\widehat{G}_{R_0}(\mathfrak{p})$.*

Démonstration. — Il s'agit de montrer que si S est une sous- R_0 -algèbre finie et normale de \overline{R} , qui est fixe sous $r_{\mathfrak{p}}(I_{R_0}(\mathfrak{p}) \cap \widehat{G}_R(\mathfrak{p}))$ pour tout $\mathfrak{p} \in T$, alors S est étale sur R_0 . Pour $\mathfrak{p} \in T$, l'extension de corps $\widehat{S}_{\mathfrak{p}}[p^{-1}]/\widehat{R}_{0(p)}[p^{-1}]$ est non ramifiée car $\widehat{S}_{\mathfrak{p}}[p^{-1}]$ est invariant sous $I_{R_0}(\mathfrak{p})$. L'extension $\widehat{S}_{\mathfrak{p}}/\widehat{R}_{0(p)}$ est donc étale. Il en est de même de $S_{\mathfrak{p}}/R_{0(p)}$ en vertu de [35, I Proposition 4.2]. Comme $\mathfrak{p} \cap S$ parcourt les idéaux premiers au-dessus de pR_0 de S lorsque \mathfrak{p} parcourt T , l'anneau S est étale sur R_0 en tous ses idéaux premiers au-dessus de pR_0 .

Soit Z l'ensemble des points de $\text{Spec}(S)$ où le morphisme $f: \text{Spec}(S) \rightarrow \text{Spec}(R_0)$ n'est pas étale. Comme $S[p^{-1}]/R_0[p^{-1}]$ est étale, on a $Z \subseteq V(p)$. Par ailleurs, on vient de voir que les idéaux premiers de hauteur 1 qui contiennent p n'appartiennent pas à Z . Ce dernier est donc de codimension ≥ 2 en tous ses points. Comme f est fini, il est dominant. Par ailleurs, S est normal pas hypothèse, et R_0 est régulier d'après le lemme 7.1.1. Le théorème de pureté de Zariski-Nagata (cf. [35, X théorème 3.1]) s'applique donc : on a $Z = \emptyset$ i.e. S est étale sur R_0 . \square

Corollaire 8.1.7. — *(critère de non ramification) Soit $V \in \mathbf{Rep}_{\mathbf{Q}_p}(\mathcal{G}_R)$. Alors V est R_0 -non ramifiée si et seulement si pour tout $\mathfrak{p} \in T$, l'action sur V de l'image de $I_{R_0}(\mathfrak{p}) \cap \widehat{G}_R(\mathfrak{p})$ dans $\mathcal{G}_R(\mathfrak{p})$ est triviale.*

8.2. Représentations de de Rham, représentations cristallines

Notation. On désigne par $D_{\text{dR}}(V)$ (resp. $D_{\text{cris}}(V)$, $D_{\text{dR}}^{\nabla}(V)$, $D_{\text{cris}}^{\nabla}(V)$) les modules $D_{\text{BdR}}(V)$ (resp. $D_{\text{Bcris}}(V)$, $D_{\text{BdR}}^{\nabla}(V)$, $D_{\text{Bcris}}^{\nabla}(V)$). De même, on notera $\alpha_{\text{dR}}(V)$ (resp. $\alpha_{\text{cris}}(V)$, $\alpha_{\text{dR}}^{\nabla}(V)$, $\alpha_{\text{cris}}^{\nabla}(V)$) pour $\alpha_{\text{BdR}}(V)$ (resp. $\alpha_{\text{Bcris}}(V)$, $\alpha_{\text{BdR}}^{\nabla}(V)$, $\alpha_{\text{Bcris}}^{\nabla}(V)$).

Si $V \in \mathbf{Rep}_{\mathbf{Q}_p}(\mathcal{G}_R)$, l'inclusion $\text{B}_{\text{cris}} \subseteq \text{B}_{\text{dR}}$ (proposition 6.2.1) induit une inclusion $D_{\text{cris}}(V) \subseteq D_{\text{dR}}(V)$. Comme $D_{\text{dR}}(V)$ (resp. $D_{\text{cris}}(V)$) est un $R[p^{-1}]$ -module (resp. un $R_0[p^{-1}]$ -module), elle induit un homomorphisme $R[p^{-1}] \otimes_{R_0[p^{-1}]} D_{\text{cris}}(V) \rightarrow D_{\text{dR}}(V)$.

Proposition 8.2.1. — *Si la condition (BR) remplie, l'homomorphisme $R[p^{-1}] \otimes_{R_0[p^{-1}]} D_{\text{cris}}(V) \rightarrow D_{\text{dR}}(V)$ est injectif.*

Démonstration. — La condition, (BR) étant remplie, l'homomorphisme $R[p^{-1}] \otimes_{R_0[p^{-1}]} \text{B}_{\text{cris}} \rightarrow \text{B}_{\text{dR}}$ est injectif (proposition 6.2.7), il en est donc de même de l'application $R[p^{-1}] \otimes_{R_0[p^{-1}]} \text{B}_{\text{cris}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V \rightarrow \text{B}_{\text{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$. Enfin, comme $R[p^{-1}]$ est étale donc projectif sur $R_0[p^{-1}]$, on a $(R[p^{-1}] \otimes_{R_0[p^{-1}]} \text{B}_{\text{cris}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\mathcal{G}_R} = R[p^{-1}] \otimes_{R_0[p^{-1}]} D_{\text{cris}}(V)$. \square

Lemme 8.2.2. — *Si $V \in \mathbf{Rep}_{\mathbf{Q}_p}(\mathcal{G}_{R_0})$, l'homomorphisme $\alpha_{\text{dR}}(V): \text{B}_{\text{dR}} \otimes_{R_0[p^{-1}]} D_{\text{dR}}(V) \rightarrow \text{B}_{\text{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$ est injectif.*

Démonstration. — Rappelons (*cf.* proposition 6.2.6) qu'on dispose d'un homomorphisme naturel injectif et \mathcal{G}_{R_0} -équivariant

$$\Psi: \widehat{R_{0(p)}}[p^{-1}] \otimes_{R_0[p^{-1}]} \mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \rightarrow \prod_{\mathfrak{p} \in T} \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}(\mathfrak{p}).$$

On a donc un homomorphisme $\left(\widehat{R_{0(p)}}[p^{-1}] \otimes_{R_0[p^{-1}]} \mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V \right)^{\mathcal{G}_{R_0}} \rightarrow \prod_{\mathfrak{p} \in T} \left(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}(\mathfrak{p}) \otimes_{\mathbf{Q}_p} V \right)^{\mathcal{G}_{R_0}(\mathfrak{p})}$. Comme $R_{0(p)}[p^{-1}]$ est un corps, on a

$$\left(\widehat{R_{0(p)}}[p^{-1}] \otimes_{R_0[p^{-1}]} \mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V \right)^{\mathcal{G}_{R_0}} = \widehat{R_{0(p)}}[p^{-1}] \otimes_{R_{0(p)}[p^{-1}]} \left(R_{0(p)}[p^{-1}] \otimes_{R_0[p^{-1}]} \mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V \right)^{\mathcal{G}_{R_0}}.$$

Comme $\left(R_{0(p)}[p^{-1}] \otimes_{R_0[p^{-1}]} \mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V \right)^{\mathcal{G}_{R_0}} = R_{0(p)}[p^{-1}] \otimes_{R_0[p^{-1}]} \left(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V \right)^{\mathcal{G}_{R_0}} = R_{0(p)}[p^{-1}] \otimes_{R_0[p^{-1}]} \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)$, l'homomorphisme naturel $\Psi: \widehat{R_{0(p)}}[p^{-1}] \otimes_{R_0[p^{-1}]} \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V) \rightarrow \prod_{\mathfrak{p}} \left(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}(\mathfrak{p}) \otimes_{\mathbf{Q}_p} V \right)^{\mathcal{G}_{R_0}(\mathfrak{p})}$ est injectif. De plus, comme

\mathcal{G}_{R_0} agit transitivement sur T , il permute transitivement les composantes sur le produit $\prod_{\mathfrak{p}} \left(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}(\mathfrak{p}) \otimes_{\mathbf{Q}_p} V \right)^{\mathcal{G}_{R_0}(\mathfrak{p})}$:

si $x \in \widehat{R_{0(p)}}[p^{-1}] \otimes_{R_0[p^{-1}]} \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ est non nul, son image $\Psi(x) = (x_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p} \in T}$ vérifie $x_{\mathfrak{p}} \neq 0$ pour tout $\mathfrak{p} \in T$. En particulier, l'application $\Psi_{\mathfrak{p}}: \widehat{R_{0(p)}}[p^{-1}] \otimes_{R_0[p^{-1}]} \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V) \rightarrow \left(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}(\mathfrak{p}) \otimes_{\mathbf{Q}_p} V \right)^{\mathcal{G}_{R_0}(\mathfrak{p})}$ (composée de Ψ et de la projection sur le facteur d'indice \mathfrak{p}) est injective.

L'idéal $\mathfrak{p} \in T$ étant fixé, on a un plongement $i_{\mathfrak{p}}: \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}(\mathfrak{p}) \rightarrow \mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \left(\widehat{R_{0(p)}} \right)$ déduit de l'inclusion $\overline{R} \rightarrow \overline{R}_{\mathfrak{p}} \rightarrow \overline{\widehat{R_{0(p)}}}$ (*cf.* section 3.3). Cette inclusion est $\widehat{\mathcal{G}}_{R_0}(\mathfrak{p})$ -équivariante (rappelons que $\mathcal{G}_{R_0}(\mathfrak{p})$ est un quotient de $\widehat{\mathcal{G}}_{R_0}(\mathfrak{p})$, *cf.* lemme 3.3.1).

Notons $V|_{\mathcal{G}_{R_0}(\mathfrak{p})}$ la restriction de V à $\mathcal{G}_{R_0}(\mathfrak{p})$ et $V|_{\widehat{\mathcal{G}}_{R_0}(\mathfrak{p})}$ cette dernière vue comme représentation de $\widehat{\mathcal{G}}_{R_0}(\mathfrak{p})$. On a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}(\mathfrak{p}) \otimes_{\widehat{R_{0(p)}}[p^{-1}]} \left(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}(\mathfrak{p}) \otimes_{\mathbf{Q}_p} V \right)^{\mathcal{G}_{R_0}(\mathfrak{p})} & \xrightarrow{\alpha_{\mathrm{dR}, \mathfrak{p}}(V|_{\mathcal{G}_{R_0}(\mathfrak{p})})} & \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}(\mathfrak{p}) \otimes_{\mathbf{Q}_p} V \\ \downarrow i_{\mathfrak{p}} \otimes i_{\mathfrak{p}} & & \downarrow i_{\mathfrak{p}} \\ \mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \left(\widehat{R_{0(p)}} \right) \otimes_{\widehat{R_{0(p)}}[p^{-1}]} \mathrm{D}_{\mathrm{dR}} \left(V|_{\widehat{\mathcal{G}}_{R_0}(\mathfrak{p})} \right) & \xrightarrow{\alpha_{\mathrm{dR}}(V|_{\widehat{\mathcal{G}}_{R_0}(\mathfrak{p})})} & \mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \left(\widehat{R_{0(p)}} \right) \otimes_{\mathbf{Q}_p} V. \end{array}$$

L'homomorphisme $\alpha_{\mathrm{dR}}(V|_{\widehat{\mathcal{G}}_{R_0}(\mathfrak{p})})$ est injectif d'après [10, Proposition 3.3.1], et $i_{\mathfrak{p}} \otimes i_{\mathfrak{p}}$ aussi car $\widehat{R_{0(p)}}[p^{-1}]$ est un corps : $\alpha_{\mathrm{dR}, \mathfrak{p}}(V|_{\mathcal{G}_{R_0}(\mathfrak{p})})$ est donc injectif. Il en est donc de même du composé

$$\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}(\mathfrak{p}) \otimes_{R_0[p^{-1}]} \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V) \xrightarrow{\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}(\mathfrak{p}) \otimes \Psi_{\mathfrak{p}}} \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}(\mathfrak{p}) \otimes_{\widehat{R_{0(p)}}[p^{-1}]} \left(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}(\mathfrak{p}) \otimes_{\mathbf{Q}_p} V \right)^{\mathcal{G}_{R_0}(\mathfrak{p})} \xrightarrow{\alpha_{\mathrm{dR}, \mathfrak{p}}(V|_{\mathcal{G}_{R_0}(\mathfrak{p})})} \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}(\mathfrak{p}) \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$$

En prenant le produit sur T , on obtient un homomorphisme injectif

$$\prod_{\mathfrak{p} \in T} \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}(\mathfrak{p}) \otimes_{R_0[p^{-1}]} \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V) \rightarrow \prod_{\mathfrak{p} \in T} \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}(\mathfrak{p}) \otimes_{\mathbf{Q}_p} V.$$

Comme $R_{0(p)}[p^{-1}]$ est un corps, l'homomorphisme naturel

$$\left(\prod_{\mathfrak{p} \in T} \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}(\mathfrak{p}) \right) \otimes_{R_{0(p)}[p^{-1}]} \left(R_{0(p)}[p^{-1}] \otimes_{R_0[p^{-1}]} \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V) \right) \rightarrow \prod_{\mathfrak{p} \in T} \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}(\mathfrak{p}) \otimes_{R_{0(p)}[p^{-1}]} \left(R_{0(p)}[p^{-1}] \otimes_{R_0[p^{-1}]} \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V) \right)$$

est injectif. Composé avec le précédent, il donne un homomorphisme injectif

$$\left(\prod_{\mathfrak{p} \in T} \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}(\mathfrak{p}) \right) \otimes_{R_0[p^{-1}]} \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V) \rightarrow \left(\prod_{\mathfrak{p} \in T} \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}(\mathfrak{p}) \right) \otimes_{\mathbf{Q}_p} V.$$

La restriction à $R_{0(p)}[p^{-1}] \otimes_{R_0[p^{-1}]} \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}$ de Ψ tensorisée avec le $R_{0(p)}[p^{-1}]$ -espace vectoriel $R_{0(p)}[p^{-1}] \otimes_{R_0[p^{-1}]} \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ fournit un homomorphisme injectif

$$\mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{R_0[p^{-1}]} R_{0(p)}[p^{-1}] \otimes_{R_0[p^{-1}]} \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V) \rightarrow \left(\prod_{\mathfrak{p} \in T} \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}(\mathfrak{p}) \right) \otimes_{R_0[p^{-1}]} \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V).$$

Composé avec le précédent, on a un homomorphisme injectif

$$\mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{R_0[p^{-1}]} R_{0(p)}[p^{-1}] \otimes_{R_0[p^{-1}]} \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V) \rightarrow \left(\prod_{\mathfrak{p} \in T} \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}(\mathfrak{p}) \right) \otimes_{\mathbf{Q}_p} V.$$

Il s'insère dans le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{R_0[p^{-1}]} \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V) & \xrightarrow{\alpha_{\mathrm{dR}}(V)} & \mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V \\ \downarrow f & & \downarrow \\ \mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{R_0[p^{-1}]} \left(R_{0(p)}[p^{-1}] \otimes_{R_0[p^{-1}]} \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V) \right) & \longrightarrow & \left(\prod_{\mathfrak{p} \in T} \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}(\mathfrak{p}) \right) \otimes_{\mathbf{Q}_p} V \end{array}$$

où f est déduit de l'application $\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V) \rightarrow R_{0(p)}[p^{-1}] \otimes_{R_0[p^{-1}]} \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ par extension des scalaires. Cette dernière est injective, parce que $\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ étant un sous $R_0[p^{-1}]$ -module de $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$, il est sans torsion (cf. corollaire 5.2.10). Comme B_{dR} est plat sur $R_0[p^{-1}]$ (theorem 5.4.1), f est injectif : l'injectivité de $\alpha_{\mathrm{dR}}(V)$ en résulte. \square

Lemme 8.2.3. — *Si $R[p^{-1}]/R_0[p^{-1}]$ est galoisienne et $V \in \mathbf{Rep}_{\mathbf{Q}_p}(\mathcal{G}_R)$, l'homomorphisme $\alpha_{\mathrm{dR}}(V)$ est injectif.*

Démonstration. — Soit \tilde{V} la représentation de \mathcal{G}_{R_0} induite par V . Posons $H = \mathcal{G}_{R_0}/\mathcal{G}_R \simeq \mathrm{Gal}(R[p^{-1}]/R_0[p^{-1}])$ et choisissons $\{h_1, \dots, h_r\} \subset \mathcal{G}_{R_0}$ un système complet de représentants de H . On a $\tilde{V} = \bigoplus_{j=1}^r h_j V$. Comme

$\dim_{\mathbf{Q}_p}(\tilde{V}) = \dim_{\mathbf{Q}_p}(V) \cdot [R[p^{-1}] : R_0[p^{-1}]]$, on a $\tilde{V} \in \mathbf{Rep}_{\mathbf{Q}_p}(\mathcal{G}_{R_0})$.

Les sous-espaces $h_j V$ de \tilde{V} sont stables par \mathcal{G}_R , car \mathcal{G}_R est distingué dans \mathcal{G}_{R_0} , on a donc

$$\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(\tilde{V}) = (\mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\mathcal{G}_{R_0}} = \left(\bigoplus_{j=1}^r h_j \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V) \right)^H.$$

Soit $d = (d_j)_{1 \leq j \leq r} \in \bigoplus_{j=1}^r h_j \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)$. Si $g \in \mathcal{G}_{R_0}$ et $j \in \{1, \dots, r\}$, il existe un unique $g(j) \in \{1, \dots, r\}$ tel que $h_j g \mathcal{G}_R = g h_{g(j)} \mathcal{G}_R$. On a alors $h_j d_{g(j)} = g(h_{g(j)} d_{g(j)})$ i.e. $g(d) = (d_{g(j)})_{1 \leq j \leq r}$. Comme \mathcal{G}_{R_0} agit transitivement sur H , on a $d \in \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(\tilde{V}) \Leftrightarrow d_{j_1} = d_{j_2}$ pour tout $j_1, j_2 \in \{1, \dots, r\}$. Ainsi, on a $\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(\tilde{V}) = \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ vu comme $R_0[p^{-1}]$ -module.

Par ailleurs, comme $R[p^{-1}]$ et $R_0[p^{-1}]$ sont normaux et $R[p^{-1}]/R_0[p^{-1}]$ finie étale galoisienne, l'homomorphisme de $R[p^{-1}]$ -algèbres

$$\begin{aligned} \tau: R[p^{-1}] \otimes_{R_0[p^{-1}]} R[p^{-1}] &\longrightarrow \bigoplus_{j=1}^r R[p^{-1}] \\ x \otimes y &\longmapsto (x h_j(y))_{1 \leq j \leq r} \end{aligned}$$

est un isomorphisme. On a alors le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{R_0[p^{-1}]} \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(\tilde{V}) = \mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{R_0[p^{-1}]} \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V) & \xrightarrow{\mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes \tau \otimes \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)} & \bigoplus_{j=1}^r \mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{R[p^{-1}]} \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V) \\ \downarrow \alpha_{\mathrm{dR}}(\tilde{V}) & & \downarrow \bigoplus_{j=1}^r \alpha_{\mathrm{dR}}(V) \\ \mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} \tilde{V} = \bigoplus_{j=1}^r \mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} h_j V & \xrightarrow{\sim} & \bigoplus_{j=1}^r \mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} h_j V \end{array}$$

L'homomorphisme $\alpha_{\mathrm{dR}}(\tilde{V})$ étant injectif d'après le lemme 8.2.2 et τ étant un isomorphisme, l'application $\alpha_{\mathrm{dR}}(V)$ est injective. \square

Proposition 8.2.4. — *Si $V \in \mathbf{Rep}_{\mathbf{Q}_p}(\mathcal{G}_R)$, l'homomorphisme $\alpha_{\mathrm{dR}}(V)$ est injectif.*

Démonstration. — Choisissons une sous- R -algèbre finie et normale S de \overline{R} , de sorte que $S[p^{-1}]/R_0[p^{-1}]$ est galoisienne. Notons $V|_S$ la restriction de V à \mathcal{G}_S . L'extension $S[p^{-1}]/R[p^{-1}]$ est finie étale galoisienne, et $\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V) = \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V|_S)^{\mathrm{Gal}(S[p^{-1}]/R[p^{-1}])}$. Par descente étale, l'homomorphisme naturel $S[p^{-1}] \otimes_{R[p^{-1}]} \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V) \rightarrow \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V|_S)$ est un isomorphisme (cf. [18, Arcata I Théorème 4.5]). On a alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{R[p^{-1}]} \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V) & \xrightarrow{\alpha_{\mathrm{dR}}(V)} & \mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V \\ \parallel & & \uparrow \alpha_{\mathrm{dR}}(V|_S) \\ \mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{S[p^{-1}]} (S[p^{-1}] \otimes_{R[p^{-1}]} \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{S[p^{-1}]} \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V|_S) \end{array}$$

et l'injectivité de $\alpha_{\mathrm{dR}}(V|_S)$ (cf. lemme 8.2.3) implique celle de $\alpha_{\mathrm{dR}}(V)$. \square

Rappelons (section 4) qu'on a un anneau $B_{\text{HT}} = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} B_{\text{HT}}^0(n)$, où $B_{\text{HT}}^0 \simeq C[V_1, \dots, V_d]$. Si $V \in \mathbf{Rep}_{\mathbf{Q}_p}(\mathcal{G}_R)$, on pose $D_{\text{HT}}(V) = (B_{\text{HT}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\mathcal{G}_R}$. C'est un $R[p^{-1}]$ -module. On dispose alors de l'homomorphisme

$$\alpha_{\text{HT}}(V): B_{\text{HT}} \otimes_{R[p^{-1}]} D_{\text{HT}}(V) \rightarrow B_{\text{HT}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V.$$

La proposition suivante est due à O. Hyodo (quoique dans une situation légèrement différente).

Proposition 8.2.5. — (cf. [37, Proposition 2.1]) Si $V \in \mathbf{Rep}_{\mathbf{Q}_p}(\mathcal{G}_R)$, l'homomorphisme $\alpha_{\text{HT}}(V)$ est injectif.

Rappelons la démonstration (on a $B_{\text{HT}}^0 \simeq S_\infty$ dans les notations de *loc. cit.*).

Démonstration. — L'homomorphisme $\alpha_{\text{HT}}(V)$ est la somme directe $\bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} \alpha(n)$ avec

$$\alpha: \bigoplus_{j \in \mathbf{Z}} B_{\text{HT}}^0(-j) \otimes_{R[p^{-1}]} D_{\text{HT}}^j(V) \rightarrow B_{\text{HT}}^0 \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$$

où $D_{\text{HT}}^j(V) = (B_{\text{HT}}(j) \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\mathcal{G}_R}$. Il suffit donc de montrer l'injectivité de ce dernier. Une démarche identique à celle des lemmes 8.2.2, 8.2.3 et de la proposition 8.2.4 montre qu'il suffit de traiter le cas où $R[p^{-1}]$ est un corps. L'anneau C est alors aussi un corps.

Supposons α non injectif et soit $x = \sum_{i=1}^m s_i \otimes d_i \in \text{Ker}(\alpha) \setminus \{0\}$ avec $s_i \in B_{\text{HT}}^0(-j_i)$ et $d_i \in D_{\text{HT}}^{j_i}(V)$. On suppose m minimal pour cette propriété : on a $m \geq 2$, $s_i \neq 0$ et $d_i \neq 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$. Montrons que quitte à changer V et x , on peut supposer $s_1 = 1$ et $j_1 = 0$.

Soit n le degré du polynôme s_1 . Supposons $n \geq 1$. Quitte à remplacer V par $V(j_1 + n)$ (ce qui a pour effet de remplacer $D_{\text{HT}}^{j_1}(V)$ par $D_{\text{HT}}^{j_1+j_1+n}(V)$), on peut supposer $j_1 = -n$. Soit $\sum_{|\underline{n}|=n} \lambda_{\underline{n}} \underline{V}^{\underline{n}} \in \text{Sym}_C^n \left(\bigoplus_{i=1}^d CV_i \right)$ la partie de

degré n de s_1 et ℓ son nombre de coefficients non nuls (par hypothèse, on a $\ell \geq 1$). Soit $\underline{n}_0 \in \mathbf{N}^d$ tel que $|\underline{n}_0| = n$ et $\lambda_{\underline{n}_0} \neq 0$. Quitte à diviser x par $\lambda_{\underline{n}_0}$ on peut supposer $\lambda_{\underline{n}_0} = 1$. Comme $n \neq 0$, on a $H^0(\mathcal{G}_R, B_{\text{HT}}^0(n)) = 0$

d'après le corollaire 4.1.4 : il existe $g \in \mathcal{G}_R$ tel que $g(s_1) \neq s_1$. Si $x' = g(x) - x = \sum_{i=1}^m (g(s_i) - s_i) \otimes d_i$, on a

$x' \in \text{Ker}(\alpha) \setminus \{0\}$ et comme $g(t^n \underline{V}^{\underline{n}}) - t^n \underline{V}^{\underline{n}}$ est de degré $\leq n-1$ pour tout $\underline{n} \in \mathbf{N}^d$ tel que $|\underline{n}| = n$, le coefficient d'indice \underline{n}_0 de la partie de degré n de $g(s_1) - s_1$ est nul : le nombre de coefficients de degré n non nuls de x' est $\leq \ell - 1$. Quitte à remplacer x par x' et en recommençant ce qui précède un nombre fini de fois, on peut supposer s_1 de degré $n-1$. Là encore, en un nombre fini d'étapes, on arrive à un élément x pour lequel $n = 0$. On a donc $s_1 \in C(-j_1) \setminus \{0\}$. Quitte à diviser x par s_1 , on peut donc supposer $s_1 = 1$ et $j_1 = 0$.

Montrons qu'il existe $g \in \mathcal{G}_R$ tel que $g(s_2) \neq s_2$. Dans le cas où $j_2 \neq 0$, cela résulte de ce que $H^0(\mathcal{G}_R, B_{\text{HT}}^0(-j_2)) = 0$ (cf. corollaire 4.1.4). Si $j_2 = 0$, cela résulte du fait qu'on a $s_2 \notin R[p^{-1}] = H^0(\mathcal{G}_R, C)$, car sinon on aurait

$x = 1 \otimes (d_1 + s_2 d_2) + \sum_{i=3}^m s_i \otimes d_i$, contredisant la minimalité de m .

Pour un tel $g \in \mathcal{G}_R$, l'élément $x' = g(x) - x = \sum_{i=2}^m (g(s_i) - s_i) \otimes d_i$ est non nul, et dans le noyau de α . Cela contredit la minimalité de m : l'homomorphisme α est donc injectif. \square

Proposition 8.2.6. — Supposons la condition (BR) remplie. Si $V \in \mathbf{Rep}_{\mathbf{Q}_p}(\mathcal{G}_R)$, l'homomorphisme $\alpha_{\text{cris}}(V)$ est injectif.

Démonstration. — Notons $F = \text{Frac}(R_0)$. On a le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} B_{\text{cris}} \otimes_{R_0[p^{-1}]} D_{\text{cris}}(V) & \xrightarrow{\alpha_{\text{cris}}(V)} & B_{\text{cris}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V \\ \downarrow (1) & & \downarrow \\ F \otimes_{R_0[p^{-1}]} B_{\text{cris}} \otimes_{R_0[p^{-1}]} D_{\text{cris}}(V) & & B_{\text{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V \\ \downarrow (2) & & \downarrow \\ F \otimes_{R_0[p^{-1}]} B_{\text{dR}} \otimes_{R_0[p^{-1}]} D_{\text{cris}}(V) & \xrightarrow{(3)} F \otimes_{R_0[p^{-1}]} B_{\text{dR}} \otimes_{R[p^{-1}]} D_{\text{dR}}(V) \xrightarrow{(4)} F \otimes_{R_0[p^{-1}]} B_{\text{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V \end{array}$$

On a $D_{\text{cris}}(V) \subset B_{\text{cris}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$. Comme les éléments de $R_0 \setminus \{0\}$ ne sont pas diviseurs de zéro dans B_{cris} (corollaire 5.2.10 et proposition 6.2.1), il en est de même dans $D_{\text{cris}}(V)$. L'homomorphisme $D_{\text{cris}}(V) \rightarrow F \otimes_{R_0[p^{-1}]} D_{\text{cris}}(V)$ est donc injectif. Par platitude de B_{cris} sur $R_0[p^{-1}]$ (théorème 6.3.8), l'application (1) est injective.

L'application (2) est l'homomorphisme (injectif) $F \otimes_{R_0[p^{-1}]} B_{\text{cris}} \rightarrow F \otimes_{R_0[p^{-1}]} B_{\text{dR}}$ tensorisé par $F \otimes_{R_0[p^{-1}]} D_{\text{cris}}(V)$ sur le corps F : elle est injective.

L'application (3) est l'homomorphisme $R[p^{-1}] \otimes_{R_0[p^{-1}]} D_{\text{cris}}(V) \rightarrow D_{\text{dR}}(V)$ (injectif d'après la proposition 8.2.1 en vertu de la condition (BR)) tensorisé par B_{dR} sur $R[p^{-1}]$ et localisé. Elle est donc injective par platitude de B_{dR} sur $R[p^{-1}]$ (théorème 5.4.1).

Enfin, l'application (4) n'est autre que $F \otimes \alpha_{\text{dR}}(V)$. Comme $\alpha_{\text{dR}}(V)$ est injective d'après la proposition 8.2.4, il en est de même de (4). L'injectivité de $\alpha_{\text{cris}}(V)$ en résulte. \square

Les modules $D_{\text{dR}}(V)$ et $D_{\text{cris}}(V)$ sont munis d'une connexion ∇ héritée de la connexion sur B_{dR} et B_{cris} respectivement.

Proposition 8.2.7. — On a $D_{\text{dR}}(V)^{\nabla=0} = D_{\text{dR}}^{\nabla}(V)$ et $D_{\text{cris}}(V)^{\nabla=0} = D_{\text{cris}}^{\nabla}(V)$.

Démonstration. — On a $D_{\text{dR}}(V)^{\nabla=0} = (B_{\text{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\mathcal{G}_R^{\nabla=0}} = (B_{\text{dR}}^{\nabla=0} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\mathcal{G}_R} = (B_{\text{dR}}^{\nabla} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\mathcal{G}_R} = D_{\text{dR}}^{\nabla}(V)$ d'après la proposition 5.3.3. On procède de même avec $D_{\text{cris}}(V)$. \square

Proposition 8.2.8. — Les applications naturelles $\beta_{\text{dR}}(V): R[p^{-1}] \otimes_K D_{\text{dR}}^{\nabla}(V) \rightarrow D_{\text{dR}}(V)$ et $\beta_{\text{cris}}(V): R_0[p^{-1}] \otimes_{W[p^{-1}]} D_{\text{cris}}^{\nabla}(V) \rightarrow D_{\text{cris}}(V)$ sont injectives.

Démonstration. — D'après la proposition 5.3.8 (resp. 6.2.4), l'application $u_{\text{dR}}: R[p^{-1}] \otimes_K B_{\text{dR}}^{\nabla} \rightarrow B_{\text{dR}}$ (resp. $u_{\text{cris}}: R_0[p^{-1}] \otimes_{W[p^{-1}]} B_{\text{cris}}^{\nabla} \rightarrow B_{\text{cris}}$) est injective. En tensorisant par V sur \mathbf{Q}_p et en prenant les invariants sous \mathcal{G}_R , on en déduit l'injectivité de $\beta_{\text{dR}}(V)$ (resp. $\beta_{\text{cris}}(V)$). \square

Proposition 8.2.9. — Soit $V \in \mathbf{Rep}_{\mathbf{Q}_p}(\mathcal{G}_R)$. L'homomorphisme $\alpha_{\text{dR}}^{\nabla}(V)$ est injectif. Si la condition (BR) remplie, l'homomorphisme $\alpha_{\text{cris}}^{\nabla}(V)$ est injectif.

Démonstration. — On a le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} B_{\text{dR}} \otimes_K D_{\text{dR}}^{\nabla}(V) & \xrightarrow{B_{\text{dR}} \otimes \beta_{\text{dR}}(V)} & B_{\text{dR}} \otimes_{R[p^{-1}]} D_{\text{dR}}(V) \\ & \searrow_{B_{\text{dR}} \otimes \alpha_{\text{dR}}^{\nabla}(V)} & \downarrow \alpha_{\text{dR}}(V) \\ & & B_{\text{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V \end{array}$$

L'homomorphisme $B_{\text{dR}} \otimes \beta_{\text{dR}}(V)$ est injectif d'après la proposition 8.2.8 et la platitude de B_{dR} sur $R[p^{-1}]$ (théorème 5.4.1). Comme l'application $\alpha_{\text{dR}}(V)$ est injective d'après la proposition 8.2.4, il en est de même de $B_{\text{dR}} \otimes \alpha_{\text{dR}}^{\nabla}(V): B_{\text{dR}} \otimes_K D_{\text{dR}}^{\nabla}(V) \rightarrow B_{\text{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$, et de l'homomorphisme $\alpha_{\text{dR}}^{\nabla}(V)$ sur les sections horizontales. L'injectivité de $\alpha_{\text{dR}}^{\nabla}(V)$ se montre de façon identique, en utilisant les propositions 8.2.8, 8.2.6 (applicable en vertu de la condition (BR)) et le théorème 6.3.8. \square

Notation. On note $\mathbf{Rep}_{\text{dR}}(\mathcal{G}_R)$ (resp. $\mathbf{Rep}_{R_0\text{-cris}}(\mathcal{G}_R)$, $\mathbf{Rep}_{\text{dR}}^{\nabla}(\mathcal{G}_R)$, $\mathbf{Rep}_{R_0\text{-cris}}^{\nabla}(\mathcal{G}_R)$) pour $\mathbf{Rep}_{B_{\text{dR}}}(\mathcal{G}_R)$ (resp. $\mathbf{Rep}_{B_{\text{cris}}}(\mathcal{G}_R)$, $\mathbf{Rep}_{B_{\text{dR}}^{\nabla}}(\mathcal{G}_R)$, $\mathbf{Rep}_{B_{\text{cris}}^{\nabla}}(\mathcal{G}_R)$), et on appelle représentation de de Rham (resp. R_0 -cristalline, resp. de de Rham horizontale, resp. R_0 -cristalline horizontale) les objets de cette catégorie.

Proposition 8.2.10. — L'homomorphisme $\alpha_{\text{dR}}^{\nabla}(V)$ est bijectif si et seulement si les homomorphismes $\beta_{\text{dR}}(V)$ et $\alpha_{\text{dR}}(V)$ sont bijectifs. Si la condition (BR) est remplie, l'homomorphisme $\alpha_{\text{cris}}^{\nabla}(V)$ est bijectif si et seulement si les homomorphismes $\beta_{\text{cris}}(V)$ et $\alpha_{\text{cris}}(V)$ sont bijectifs.

Démonstration. — On a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} B_{\text{dR}} \otimes_K D_{\text{dR}}^{\nabla}(V) & \xrightarrow{B_{\text{dR}} \otimes \alpha_{\text{dR}}^{\nabla}(V)} & B_{\text{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V \\ \parallel & & \uparrow \alpha_{\text{dR}}(V) \\ B_{\text{dR}} \otimes_{R[p^{-1}]} R[p^{-1}] \otimes_K D_{\text{dR}}^{\nabla}(V) & \xrightarrow{B_{\text{dR}} \otimes \beta_{\text{dR}}(V)} & B_{\text{dR}} \otimes_{R[p^{-1}]} D_{\text{dR}}(V) \end{array}$$

Si $\alpha_{\text{dR}}^{\nabla}(V)$ est bijectif, il en est de même de $B_{\text{dR}} \otimes \alpha_{\text{dR}}^{\nabla}(V)$: l'homomorphisme $\alpha_{\text{dR}}(V)$ est surjectif donc (proposition 8.2.4) bijectif, et $B_{\text{dR}} \otimes \beta_{\text{dR}}(V)$ est bijectif. Par fidèle platitude de B_{dR} sur $R[p^{-1}]$ (théorème 5.4.1), $\beta_{\text{dR}}(V)$ est bijectif.

Réciproquement, si $\beta_{\text{dR}}(V)$ et $\alpha_{\text{dR}}(V)$ sont bijectifs, l'homomorphisme $B_{\text{dR}} \otimes \alpha_{\text{dR}}^{\nabla}(V)$ aussi, *i.e.* $\alpha_{\text{dR}}^{\nabla}(V)$ est bijectif par fidèle platitude de B_{dR} sur $R[p^{-1}]$. Le cas \tilde{R} -cristallin se traite de la même façon, en utilisant le théorème 6.3.8. \square

Remarque 8.2.11. — D'après ce qui précède, une représentation V est de de Rham (resp. R_0 -cristalline) horizontale si et seulement si elle est de de Rham (resp. R_0 -cristalline) et la connexion sur $D_{\text{dR}}(V)$ (resp. $D_{\text{cris}}(V)$) est triviale.

Proposition 8.2.12. — Supposons la condition (BR) remplie. Alors l'homomorphisme naturel de K -espaces vectoriels $K \otimes_{W[p^{-1}]} D_{\text{cris}}^{\nabla}(V) \rightarrow D_{\text{dR}}^{\nabla}(V)$ est injectif.

Démonstration. — L'injectivité de $f: K \otimes_{W[p^{-1}]} D_{\text{cris}}^{\nabla}(V) \rightarrow D_{\text{dR}}^{\nabla}(V)$ résulte de la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} R[p^{-1}] \otimes_{W[p^{-1}]} D_{\text{cris}}^{\nabla}(V) & \xrightarrow{R[p^{-1}] \otimes f} & R[p^{-1}] \otimes_K D_{\text{dR}}^{\nabla}(V) \\ \downarrow R[p^{-1}] \otimes \beta_{\text{cris}}(V) & & \downarrow \beta_{\text{dR}}(V) \\ R[p^{-1}] \otimes_{\tilde{R}[p^{-1}]} D_{\text{cris}}^{\nabla}(V) & \longrightarrow & D_{\text{dR}}^{\nabla}(V) \end{array}$$

des propositions 8.2.1, 8.2.8 et de la platitude de $R[p^{-1}]$ sur $\tilde{R}[p^{-1}]$. \square

Proposition 8.2.13. — Supposons la condition (BR) remplie et soit V une représentation \tilde{R} -cristalline (resp. \tilde{R} -cristalline horizontale). Alors V est de de Rham (resp. de de Rham horizontale) et l'homomorphisme naturel $R[p^{-1}] \otimes_{\tilde{R}[p^{-1}]} D_{\text{cris}}^{\nabla}(V) \rightarrow D_{\text{dR}}^{\nabla}(V)$ (resp. $K \otimes_{W[p^{-1}]} D_{\text{cris}}^{\nabla}(V) \rightarrow D_{\text{dR}}^{\nabla}(V)$) est un isomorphisme.

Démonstration. — Par hypothèse, l'homomorphisme $\alpha_{\text{cris}}(V)$ (resp. $\alpha_{\text{cris}}^{\nabla}(V)$) est un isomorphisme. En tensorisant par B_{dR} (resp. B_{dR}^{∇}) au-dessus de B_{cris} (resp. B_{cris}^{∇}), on en déduit un isomorphisme $B_{\text{dR}} \otimes_{R_0[p^{-1}]} D_{\text{cris}}^{\nabla}(V) \rightarrow B_{\text{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$ (resp. $B_{\text{dR}}^{\nabla} \otimes_{W[p^{-1}]} D_{\text{cris}}^{\nabla}(V) \rightarrow B_{\text{dR}}^{\nabla} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$) i.e. un isomorphisme

$$B_{\text{dR}} \otimes_{R[p^{-1}]} (R[p^{-1}] \otimes_{R_0[p^{-1}]} D_{\text{cris}}^{\nabla}(V)) \rightarrow B_{\text{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$$

(resp. $B_{\text{dR}}^{\nabla} \otimes_K (K \otimes_{W[p^{-1}]} D_{\text{cris}}^{\nabla}(V)) \rightarrow B_{\text{dR}}^{\nabla} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$). Ce dernier est le composé $\alpha_{\text{dR}}(V) \circ (B_{\text{dR}} \otimes i_V)$ (resp. $\alpha_{\text{dR}}^{\nabla}(V) \circ (B_{\text{dR}}^{\nabla} \otimes i_V^{\nabla})$) où i_V (resp. i_V^{∇}) est l'homomorphisme naturel $R[p^{-1}] \otimes_{R_0[p^{-1}]} D_{\text{cris}}^{\nabla}(V) \rightarrow D_{\text{dR}}^{\nabla}(V)$ (resp. $K \otimes_{W[p^{-1}]} D_{\text{cris}}^{\nabla}(V) \rightarrow D_{\text{dR}}^{\nabla}(V)$). Il en résulte que $\alpha_{\text{dR}}(V)$ (resp. $\alpha_{\text{dR}}^{\nabla}(V)$) est surjectif, donc un isomorphisme d'après la proposition 8.2.4 (resp. 8.2.9). La représentation V est donc de de Rham (resp. de de Rham horizontale). Par ailleurs, l'homomorphisme $B_{\text{dR}} \otimes i_V$ (resp. $B_{\text{dR}}^{\nabla} \otimes i_V^{\nabla}$) est un isomorphisme. Par fidèle platitude de B_{dR} sur $R[p^{-1}]$ (théorème 5.4.1), l'homomorphisme i_V (resp. i_V^{∇}) est un isomorphisme, ce qu'on voulait. \square

Proposition 8.2.14. — Soit V une représentation non ramifiée alors V est de de Rham et $D_{\text{dR}}(V) = D_{\text{nr}}(V)$. Si la condition (BR) est remplie, alors V est R_0 -cristalline et $D_{\text{cris}}(V) = D_{\text{nr}}^0(V)$.

Démonstration. — Rappelons (proposition 5.2.4 et ce qui suit la définition 6.1.11) qu'on a des applications naturelles et injectives $\widehat{R}^{\text{nr}}[p^{-1}] \rightarrow B_{\text{dR}}$ et $\widehat{R}_0^{\text{nr}}[p^{-1}] \rightarrow B_{\text{cris}}$. Elles induisent des inclusions $i: D_{\text{nr}}(V) \rightarrow D_{\text{dR}}(V)$ et $i: D_{\text{nr}}^0(V) \rightarrow D_{\text{cris}}(V)$. On a alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc} B_{\text{dR}} \otimes_{R[p^{-1}]} D_{\text{nr}}(V) & \xrightarrow{B_{\text{dR}} \otimes \alpha_{\text{nr}}(V)} & B_{\text{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V \\ \downarrow B_{\text{dR}} \otimes i & & \uparrow \alpha_{\text{dR}}(V) \\ B_{\text{dR}} \otimes_{R[p^{-1}]} D_{\text{dR}}(V) & \xrightarrow{\alpha_{\text{dR}}(V)} & B_{\text{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V \end{array}$$

La flèche du haut étant bijective, celle du bas est surjective. D'après la proposition 8.2.4, elle est injective, c'est donc un isomorphisme. On en déduit que la flèche de gauche $\text{Id}_{B_{\text{dR}}} \otimes i$ est un isomorphisme. Par fidèle platitude de B_{dR} sur $R[p^{-1}]$ (théorème 5.4.1), l'application i est bijective, et on a $D_{\text{dR}}(V) = D_{\text{nr}}(V)$. Le raisonnement avec « R_0 -non ramifiée » est analogue. \square

Soit V une représentation p -adique. D'après les propositions 8.2.10, 8.2.13 et 8.2.14, on a les implications suivantes (si la condition (BR) est remplie)

$$\begin{array}{ccccc} V \text{ est cristalline horizontale} & \iff & V \text{ est cristalline} & \iff & V \text{ est } R_0\text{-non ramifiée} \\ \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\ V \text{ est de de Rham horizontale} & \iff & V \text{ est de de Rham} & \iff & V \text{ est non ramifiée.} \end{array}$$

Remarque 8.2.15. — Justification de la construction de B_{dR} et de B_{cris} .

Si X est un schéma en groupes sur R , notons $T_p(X) = \varprojlim X(\overline{R}[p^{-1}])[p^n]$ son module de Tate et posons $V_p(X) = \mathbf{Q}_p \otimes_{\mathbf{Z}_p} T_p(X)$. En particulier, on a $T_p(\mathbf{G}_m) = \mathbf{Z}_p(1) = \mathbf{Z}_p t$ (c'est ce qui motive la construction du « petit » anneau de Hodge-Tate $C[t, t^{-1}]$, pour lequel les puissances entières du caractère cyclotomique sont admissibles).

L'anneau B_{dR}^+ doit être une $W(\mathcal{R})[p^{-1}]$ -algèbre et une $\overline{R}[p^{-1}]$ -algèbre (pour que les représentations finies soient de de Rham, cf. proposition 8.1.1). Par ailleurs, il doit être muni d'une application $\theta: B_{\text{dR}}^+ \rightarrow C$, qui prolonge $\text{Id} \otimes \theta$ sur $(R \otimes_W W(\mathcal{R})) [p^{-1}]$ et complet pour la topologie $\text{Ker}(\theta)$ -adique. D'après la proposition 5.2.3, l'anneau B_{dR}^+ construit au 5.1 est minimal pour ces propriétés.

De même l'anneau A_{cris} doit être une $W(\mathcal{R})$ -algèbre et une $\widehat{R}_0^{\text{nr}}[p^{-1}]$ -algèbre (pour que les représentations non ramifiées soient cristallines, cf. 8.1.3). Par ailleurs, il doit être muni d'une application $\theta: A_{\text{cris}} \rightarrow \widehat{R}$, qui prolonge $\text{Id} \otimes \theta$ sur $(R_0 \otimes_W W(\mathcal{R})) [p^{-1}]$ dont le noyau $\text{Ker}(\theta)$ admet des puissances divisées compatibles avec les puissances divisées canoniques sur l'idéal engendré par p . L'anneau A_{cris} construit au 6.1 est minimal pour ces propriétés.

Bien sûr, il y a une justification (de nature cohomologique) plus profonde de ces constructions (cf. appendice 9.3).

8.3. Structures supplémentaires sur $D_{\text{dR}}(V)$ et $D_{\text{cris}}(V)$

Les modules $D_{\text{dR}}(V)$ (resp. $D_{\text{cris}}(V)$) et $D_{\text{dR}}^{\nabla}(V)$ (resp. $D_{\text{cris}}^{\nabla}(V)$) sont munis de structures supplémentaires.

- (i) Le $R[p^{-1}]$ -module $D = D_{\text{dR}}(V)$ est muni d'une filtration décroissante, séparée et exhaustive $\{F\text{il}^r D\}_{r \in \mathbf{Z}}$. En effet, l'anneau B_{dR} est muni d'une filtration Fil^{\bullet} , stable par l'action de \mathcal{G}_R . Elle induit une filtration sur $B_{\text{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$ et donc sur $D_{\text{dR}}(V) \subset B_{\text{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$.

Le $R[p^{-1}]$ -module $D = D_{\text{dR}}(V)$ est aussi muni d'une connexion intégrable ∇ vérifiant la transversalité de Griffith $\nabla(F\text{il}^r D) \subseteq F\text{il}^{r-1} D \otimes_{R[p^{-1}]} \widehat{\Omega}_R[p^{-1}]$ (pour $r \in \mathbf{Z}$). En effet, l'application

$$\begin{aligned} V \otimes_{\mathbf{Q}_p} B_{\text{dR}} &\longrightarrow (V \otimes_{\mathbf{Q}_p} B_{\text{dR}}) \otimes_{R[p^{-1}]} \widehat{\Omega}_R[p^{-1}] \\ v \otimes b &\longmapsto v \otimes \nabla(b) \end{aligned}$$

induit une application $D_{\text{dR}}(V) \rightarrow D_{\text{dR}}(V) \otimes_{R[p^{-1}]} \widehat{\Omega}_R[p^{-1}]$ car ∇ commute à l'action de \mathcal{G}_R . Comme ∇ est une connexion intégrable, c'est encore une connexion intégrable, on la note encore ∇ . Comme ∇ vérifie la transversalité de Griffith sur B_{dR} , il en est de même de la connexion induite sur $D_{\text{dR}}(V)$.

- (ii) Le $R_0[p^{-1}]$ -module $D_0 = D_{\text{cris}}(V)$ est muni d'un opérateur φ semi-linéaire par rapport au Frobenius σ sur $R_0[p^{-1}]$. En effet, l'anneau B_{cris} est muni d'un opérateur φ σ -linéaire qui commute à l'action de \mathcal{G}_R . Il induit donc un opérateur φ σ -linéaire sur $B_{\text{cris}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$ par $\varphi(b \otimes v) = \varphi(b) \otimes v$, et comme φ commute à l'action de \mathcal{G}_R , il laisse stable le sous- $R_0[p^{-1}]$ -module $D_{\text{cris}}(V)$.

Supposons la condition (BR) remplie. Le $R[p^{-1}]$ -module $(D_0)_R := R[p^{-1}] \otimes_{R_0[p^{-1}]} D_0$ est un sous- $R[p^{-1}]$ -module de $D_{\text{dR}}(V)$ (proposition 8.2.1). Il est donc muni d'une filtration $\{F\text{il}^r(D_0)_R\}_{r \in \mathbf{Z}}$ décroissante, séparée et exhaustive et d'une connexion intégrable ∇ induites par l'homomorphisme injectif $(D_0)_R \rightarrow D$. De plus on a $\nabla \varphi = \varphi \nabla$ sur D_0 (en effet, d'après la proposition 6.2.5, l'opérateur φ et la connexion ∇ commutent sur B_{cris} , il en est donc de même sur $D_{\text{cris}}(V)$).

- (iii) Le K -espace vectoriel $D^{\nabla} = D_{\text{dR}}^{\nabla}(V)$ est muni d'une filtration $\{F\text{il}^r D\}_{r \in \mathbf{Z}}$ qui est décroissante, séparée et exhaustive.
- (iv) Le $W[p^{-1}]$ -espace vectoriel $D_0^{\nabla} = D_{\text{cris}}^{\nabla}(V)$ est muni d'un opérateur φ semi-linéaire par rapport au Frobenius absolu sur $W[p^{-1}]$. Par ailleurs, si la condition (BR) est remplie, le K -espace vectoriel $(D_0^{\nabla})_K = K \otimes_{W[p^{-1}]} D_0^{\nabla}$ est isomorphe à un sous- K -espace vectoriel de $D_{\text{dR}}^{\nabla}(V)$ (proposition 8.2.12). Il est donc muni d'une filtration décroissante $\{F\text{il}^r(D_0^{\nabla})_K\}_{r \in \mathbf{Z}}$ séparée et exhaustive induite par celle de D^{∇} .

Proposition 8.3.1. — *Le $R[p^{-1}]$ -module $D_{\text{dR}}(V)$ est projectif de rang $\leq \dim(V)$. De même, le $R_0[p^{-1}]$ -module $D_{\text{cris}}(V)$ est projectif de rang $\leq \dim(V)$.*

Démonstration. — Pour tout $r \in \mathbf{Z}$, on a la suite exacte

$$0 \rightarrow \text{Fil}^{r+1} B_{\text{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V \rightarrow \text{Fil}^r B_{\text{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V \rightarrow B_{\text{HT}}^0 t^r \otimes_{\mathbf{Q}_p} V \rightarrow 0$$

qui induit l'inclusion

$$F\text{il}^r D_{\text{dR}}(V) = (\text{Fil}^r B_{\text{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\mathcal{G}_R} / (\text{Fil}^r B_{\text{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\mathcal{G}_R} \hookrightarrow D_{\text{HT}}^0(V(r)).$$

D'après la proposition 4.2.6, le $R[p^{-1}]$ -module $D_{\text{HT}}^0(V(r))$ est de type fini, nul sauf pour un nombre fini d'entiers r : il en est de même de $F\text{il}^r D_{\text{dR}}(V)$. Ainsi, le $R[p^{-1}]$ -module $D_{\text{dR}}(V)$ est de type fini.

Comme $R[p^{-1}]$ est fini sur $R_0[p^{-1}]$, c'est aussi un $R_0[p^{-1}]$ -module de type fini. Or $D_{\text{cris}}(V) \subseteq D_{\text{dR}}(V)$: le $R_0[p^{-1}]$ -module $D_{\text{cris}}(V)$ est de type fini (car $R_0[p^{-1}]$ est noethérien).

En vertu de la proposition 7.1.2, comme ils sont naturellement munis d'une connexion intégrable, les modules $D_{\text{dR}}(V)$ et $D_{\text{cris}}(V)$ sont projectifs. \square

Proposition 8.3.2. — *Soit $V \in \mathbf{Rep}_{\text{dR}}(\mathcal{G}_R)$. Pour tout $r \in \mathbf{Z}$, les $R[p^{-1}]$ -modules $F\text{il}^r(D_{\text{dR}}(V))$ et $Gr^r(D_{\text{dR}}(V))$ (gradués de $D_{\text{dR}}(V)$ pour la filtration $\{F\text{il}^r(D_{\text{dR}}(V))\}_{r \in \mathbf{Z}}$) sont projectifs de type fini.*

Démonstration. — L'homomorphisme $\alpha_{\mathrm{dR}}(V): \mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{R[p^{-1}]} \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V) \rightarrow \mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$ est un isomorphisme. En passant aux gradués, on a pour tout $n \in \mathbf{Z}$

$$\bigoplus_{i+j=n} \mathrm{Gr}^i \mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{R[p^{-1}]} \mathrm{Gr}^j \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V) \simeq \mathrm{Gr}^n \mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V.$$

Soit encore

$$\bigoplus_{i+j=n} C[v_1, \dots, v_d](i) \otimes_{R[p^{-1}]} \mathrm{Gr}^j \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V) \simeq C[v_1, \dots, v_d](n) \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$$

(proposition 5.2.6). On voit ainsi que pour tout $r \in \mathbf{Z}$, le $C[v_1, \dots, v_d]$ -module $C[v_1, \dots, v_d] \otimes_{R[p^{-1}]} \mathrm{Gr}^r \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ est projectif de type fini comme facteur direct de $C[v_1, \dots, v_d] \otimes_{\mathbf{Q}_p} V(n-r)$. Grâce à la fidèle platitude de $R[p^{-1}]$ -module $C[v_1, \dots, v_d]$ (théorème 3.2.3), le $R[p^{-1}]$ -module $\mathrm{Gr}^r \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ est projectif de type fini.

Comme les $\mathrm{Fil}^r \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ sont, en tant que $R[p^{-1}]$ -modules, des extensions successives d'un nombre fini de $\mathrm{Gr}^j \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)$, ils sont projectifs de type fini. \square

Proposition 8.3.3. — *Si V est R_0 -cristalline (resp. R_0 -cristalline horizontale), l'homomorphisme $R_0[p^{-1}]$ -linéaire (resp. $W[p^{-1}]$ -linéaire) $\tilde{\varphi}: \sigma^* \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V) \rightarrow \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ (resp. $\tilde{\varphi}: \sigma^* \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}^\nabla(V) \rightarrow \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}^\nabla(V)$) linéarisé de φ est un isomorphisme.*

Démonstration. — Supposons que la représentation V est R_0 -cristalline. On a un isomorphisme

$$\mathrm{B}_{\mathrm{cris}} \otimes_{R_0[p^{-1}]} \sigma^* \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V) \simeq \mathrm{B}_{\mathrm{cris}} \otimes_{R_0[p^{-1}]} \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)$$

et le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{B}_{\mathrm{cris}} \otimes_{R_0[p^{-1}]} \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V) & \xrightarrow{\mathrm{B}_{\mathrm{cris}} \otimes \tilde{\varphi}} & \mathrm{B}_{\mathrm{cris}} \otimes_{R_0[p^{-1}]} \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V) \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ \mathrm{B}_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}} (\mathrm{B}_{\mathrm{cris}} \otimes_{R_0[p^{-1}]} \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)) & & \mathrm{B}_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}} (\mathrm{B}_{\mathrm{cris}} \otimes_{R_0[p^{-1}]} \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)) \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ \mathrm{B}_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}} (\mathrm{B}_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{B}_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V \end{array}$$

l'homomorphisme du bas étant donné par $b_1 \otimes b_2 \otimes v \mapsto b_1 \varphi(b_2) \otimes v$. Il en résulte que l'homomorphisme $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}} \otimes \varphi$ est un isomorphisme. Par fidèle platitude de $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}$ sur $R_0[p^{-1}]$ (théorème 6.3.8), l'homomorphisme $R_0[p^{-1}]$ -linéaire $\varphi: \sigma^* \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V) \rightarrow \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ est un isomorphisme.

Le cas où V est R_0 -cristalline horizontale se traite de façon identique. \square

Proposition 8.3.4. — (i) *Si $V \in \mathbf{Rep}_{\mathbf{Q}_p}(\mathcal{G}_R)$ est de de Rham, alors $\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ est un objet de $\mathbf{MF}_R(\nabla)$.*

(ii) *Supposons la condition (BR) remplie. Si V est R_0 -cristalline, alors $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ est un objet de $\mathbf{MF}_{R/R_0}(\varphi, \nabla)$.*

Démonstration. — (i) Le $R[p^{-1}]$ -module $D = \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ est muni d'une connexion intégrable $\nabla: D \rightarrow D \otimes_{R[p^{-1}]} \hat{\Omega}_{R/p}^1$ et d'une filtration $\mathrm{Fil}^\bullet D$ décroissante séparée et exhaustive telle que ∇ vérifie la transversalité de Griffith. Le $R[p^{-1}]$ -module D est projectif de type fini (proposition 8.3.1) et le gradué $\mathrm{Gr}^\bullet D$ est projectif car V est de de Rham (proposition 8.3.2). Le $R[p^{-1}]$ -module $\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ est donc un objet de $\mathbf{MF}_R(\nabla)$.

(ii) Le $R_0[p^{-1}]$ -module $D = \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ est muni d'un opérateur de Frobenius φ semi-linéaire par rapport au Frobenius σ sur $R_0[p^{-1}]$, d'une connexion intégrable $\nabla: D \rightarrow D \otimes_{R_0[p^{-1}]} \hat{\Omega}_{R_0/p}^1$ telle que $\nabla \varphi = \varphi \nabla$ et d'une filtration $\mathrm{Fil}^\bullet D_R$ décroissante séparée et exhaustive sur $D_R = R[p^{-1}] \otimes_{R_0[p^{-1}]} D$ telle que ∇ vérifie la transversalité de Griffith (car $D_R \subseteq \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ en vertu de la proposition 8.2.1).

Soit \mathcal{V} un réseau de V stable par \mathcal{G}_R . Si V est R_0 -cristalline, on a $\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V) = D_R = R[p^{-1}] \otimes_{R_0[p^{-1}]} D$ (proposition 8.2.13) et le $R_0[p^{-1}]$ -module D est de type fini (proposition 8.3.1) : pour n entier assez grand, si \mathcal{D} désigne le R_0 -module $(t^{-n} \mathrm{A}_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathcal{V})^{\mathcal{G}_R}$, on a $D = \mathcal{D}[p^{-1}]$. Par construction, \mathcal{D} est stable par ∇ . Pour $i \in \{1, \dots, d\}$, on a $N_i^p(\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}) \subseteq p \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}$: la connexion ∇ sur D est quasi-nilpotente. Par ailleurs, l'homomorphisme $R_0[p^{-1}]$ -linéaire $\tilde{\varphi}: \sigma^* D \rightarrow D$ déduit de φ est bijectif d'après la proposition 8.3.3. Enfin, le $R[p^{-1}]$ -module D_R appartient à la catégorie $\mathbf{MF}_R(\nabla)$. Le $R_0[p^{-1}]$ -module $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ est donc un objet de $\mathbf{MF}_{R/R_0}(\varphi, \nabla)$. \square

Remarque 8.3.5. — (Indépendance de la notion de représentation cristalline par rapport aux choix). Dans le cas où la condition (BR) est remplie, on peut montrer que le fait d'être R_0 -cristalline ne dépend que de R et pas du choix de R_0 (cf. [10, Proposition 3.6.4]) comme c'est fait dans *loc. cit.* 3.6. Rappelons qu'on définit pour cela l'anneau $\mathrm{A}_{\max}(R)$ comme étant le séparé complété pour la topologie p -adique de la sous- $R \otimes_W W(\mathcal{R})$ de $R \otimes_W W(\mathcal{R})[p^{-1}]$ engendrée par $\varpi^{-1} \mathrm{Ker}(\theta_R)$. C'est un anneau qui ne dépend que de R . La R_0 -algèbre $\mathrm{A}_{\max}(R_0)$ est munie d'un opérateur de Frobenius φ .

On montre successivement que $\varphi(A_{\max}(R_0)) \subseteq A_{\text{cris}}(R_0) \subseteq A_{\max}(R_0)$ (cf. [10, Proposition 3.5.3]), que $A_{\max}(R) \subseteq p^{-1}(R \otimes_{R_0} A_{\max}(R_0))$ (cf. [10, Proposition 3.6.2]), que pour $N \in \mathbf{N}$ tel que $p^N \geq e$, on a $\varphi^N(A_{\max}(R_0)[p^{-1}]) \subseteq A_{\max}(R)[p^{-1}]$ (cf. [10, Proposition 3.6.3]). On en déduit que si $V \in \mathbf{Rep}_{\mathbf{Q}_p}(\mathcal{G}_R)$ et

$$D_{\max}(V) = (A_{\max}(R_0)[t^{-1}] \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\mathcal{G}_R} \quad \text{et} \quad D_{\max,R}(V) = (A_{\max}(R)[t^{-1}] \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\mathcal{G}_R},$$

on a $D_{\max}(V) = D_{\text{cris}}(V)$ et

$$R[p^{-1}] \otimes_{\sigma^N(R_0[p^{-1}])} \varphi^N(D_{\max}(V)) \subseteq D_{\max,R}(V) \subseteq R[p^{-1}] \otimes_{R_0[p^{-1}]} D_{\text{cris}}(V)$$

de sorte que $D_{\max,R}(V) = R[p^{-1}] \otimes_{R_0[p^{-1}]} D_{\max}(V)$ en vertu de la proposition 8.3.3. Cela implique que V est R_0 -cristalline si et seulement si elle est $A_{\max}(R)[t^{-1}]$ -admissible, ce qui est indépendant du choix de R_0 .

8.4. \mathcal{G}_R -régularité de B_{cris} et de B_{dR}

Soit $\eta: \mathcal{G}_R \rightarrow \mathbf{Z}_p^\times$ un homomorphisme continu. Soit V_η la représentation p -adique de dimension 1 qui est \mathbf{Q}_p sur lequel \mathcal{G}_R agit via le caractère η . On dit que η est de de Rham (resp. \tilde{R} -cristallin, resp. R_0 -non ramifié) si V_η l'est.

Si V_1 et V_2 sont deux représentations de de Rham (resp. de de Rham horizontale), il en est de même de $V_1 \otimes_{\mathbf{Q}_p} V_2$ d'après [10, Proposition 3.1.5]. De même, si la condition (BR) est remplie et V_1 et V_2 sont cristallines (resp. cristalline horizontale), il en est de même de $V_1 \otimes_{\mathbf{Q}_p} V_2$.

Proposition 8.4.1. — *Soit $\eta: \mathcal{G}_R \rightarrow \mathbf{Z}_p^\times$ un homomorphisme continu. Alors*

- (i) *η est de de Rham si et seulement si η peut s'écrire $\eta = \eta_f \eta_{\text{nr}} \chi^n$ où η_f est un caractère d'ordre fini, η_{nr} un caractère (R_0 -)non ramifié;*
- (ii) *si la condition (BR) est remplie, η est R_0 -cristallin si et seulement si η peut s'écrire $\eta = \eta_{\text{nr}} \chi^n$ où η_{nr} un caractère R_0 -non ramifié et $n \in \mathbf{Z}$.*

En particulier, une représentation de de Rham de dimension 1 est potentiellement R_0 -cristalline.

Démonstration. — Soit $V = V_\eta = \mathbf{Q}_p v$ la représentation p -adique définie par le caractère η .

(i) Supposons V de de Rham. Soit $D = D_{\text{dR}}(V)$, c'est un $R[p^{-1}]$ -module projectif de rang 1, muni d'une connexion intégrable $\nabla: D \rightarrow D \otimes_{R[p^{-1}]} \hat{\Omega}_R^1[p^{-1}]$. Soit $R[p^{-1}] = \sum_{j=1}^r (R[p^{-1}])_{f_j}$ une partition de l'unité telle que $D_{f_j} = (R[p^{-1}])_{f_j} \otimes_{R[p^{-1}]} D$ est un $(R[p^{-1}])_{f_j}$ -module libre, pour $j \in \{1, \dots, r\}$. Il existe alors $b_j \in B_{\text{dR}} \setminus \{0\}$ tel que $D_{f_j} = (R[p^{-1}])_{f_j} (b_j \otimes v)$.

Si $n \in \mathbf{Z}$, la représentation $\mathbf{Q}_p(n)$ est de de Rham, il en est donc de même de $V(n)$. Par ailleurs, remplacer V par $V(n)$ revient à remplacer η par $\eta \chi^n$, et D_{f_j} par $(R[p^{-1}])_{f_j} (t^{-n} b_j \otimes v)$. En choisissant n assez grand, on se ramène au cas où $b_j \in B_{\text{dR}}^+$ pour tout $j \in \{1, \dots, r\}$.

Rappelons qu'on a $B_{\text{dR}}^+ = B_{\text{dR}}^{\nabla+} \llbracket u_1, \dots, u_d \rrbracket$ (proposition 5.2.2). Écrivons $b_j = \sum_{\underline{n} \in \mathbf{N}^d} b_{\underline{n}}^{(j)} \underline{u}^{\underline{n}}$ et $f_j = \sum_{\underline{n} \in \mathbf{N}^d} f_{\underline{n}}^{(j)} \underline{u}^{\underline{n}}$,

avec $b_{\underline{n}}^{(j)}, f_{\underline{n}}^{(j)} \in B_{\text{dR}}^{\nabla+}$ et où $\underline{u}^{\underline{n}} = \prod_{i=1}^d u_i^{n_i}$ pour $\underline{n} = (n_1, \dots, n_d) \in \mathbf{N}^d$. On a $\theta(f_j) = \theta(f_{\underline{0}}^{(j)})$. Comme $f_j \in R[p^{-1}]$, on a $\theta(f_j) = f_j$ et donc $f_{\underline{0}}^{(j)}$ n'est pas diviseur de zéro. On en déduit une inclusion $(B_{\text{dR}}^+)_{f_j} \subseteq (B_{\text{dR}}^{\nabla+})_{f_{\underline{0}}^{(j)}} \llbracket u_1, \dots, u_d \rrbracket$. Le $R[p^{-1}]$ -module D est muni d'une connexion intégrable ∇ , soit encore de d dérivations $N_i: D \rightarrow D$: pour tout $j \in \{1, \dots, d\}$, il existe $k_{i,j} \in (R[p^{-1}])_{f_j}$ tel que $N_i(b_j) = k_{i,j} b_j$ pour $i \in \{1, \dots, d\}$.

Posons $\underline{k}(j) = (k_{1,j}, \dots, k_{d,j})$ et

$$\mathcal{E}(\underline{k}(j), f_j) = \left\{ x \in (B_{\text{dR}}^{\nabla+})_{f_{\underline{0}}^{(j)}} \llbracket u_1, \dots, u_d \rrbracket, (\forall i \in \{1, \dots, d\}) N_i(x) = k_{i,j} x \right\}.$$

C'est un $(B_{\text{dR}}^{\nabla+})_{f_{\underline{0}}^{(j)}}$ -module. Écrivons $x = \sum_{\underline{n} \in \mathbf{N}^d} x_{\underline{n}}^{(j)} \underline{u}^{\underline{n}}$ avec $x_{\underline{n}}^{(j)} \in (B_{\text{dR}}^{\nabla+})_{f_{\underline{0}}^{(j)}}$ pour $\underline{n} \in \mathbf{N}^d$. Désignons par

\underline{e}_i le multi-indice $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ (le 1 étant à la i -ème coordonnée). On a $N_i(x) = \sum_{\underline{n} \in \mathbf{N}^d} x_{\underline{n}} n_i \underline{u}^{\underline{n} - \underline{e}_i} (u_i +$

$1 \otimes [\tilde{T}_i])$ et donc $N_i(x) = \sum_{\underline{n} \in \mathbf{N}^d} (n_i x_{\underline{n}} + (n_i + 1)(1 \otimes [\tilde{T}_i]) x_{\underline{n} + \underline{e}_i}) \underline{u}^{\underline{n}}$. Écrivons alors $k_{i,j}$ comme un élément

de $(B_{\text{dR}}^{\nabla+})_{f_{\underline{0}}^{(j)}} \llbracket u_1, \dots, u_d \rrbracket$: on a $k_{i,j} = \sum_{\underline{n} \in \mathbf{N}^d} k_{\underline{n}}^{(i,j)} \underline{u}^{\underline{n}}$. L'égalité $N_i(x) = k_{i,j} x$ se traduit alors, dans

$(B_{\text{dR}}^{\nabla+})_{f_{\underline{0}}^{(j)}}[u_1, \dots, u_d]$ par les égalités $n_i x_{\underline{n}} + (n_i + 1)(1 \otimes [\tilde{T}_i])x_{\underline{n}+\underline{e}_i} = \sum_{\underline{m} \leq \underline{n}} k_{\underline{m}}^{(i,j)} x_{\underline{n}-\underline{m}}$, et donc par

$$x_{\underline{n}+\underline{e}_i} = \frac{1}{n_i+1}(1 \otimes [\tilde{T}_i]^{-1}) \left(\sum_{\underline{m} \leq \underline{n}} k_{\underline{m}}^{(i,j)} x_{\underline{n}-\underline{m}} - n_i x_{\underline{n}} \right).$$

pour tout $\underline{n} \in \mathbf{N}^d$ et tout $i \in \{1, \dots, d\}$. On en déduit que les $x_{\underline{n}}$ se calculent de proche en proche à partir de $x_{\underline{0}}$, en particulier, ils sont tous divisibles par $x_{\underline{0}}$. L'application $\mathcal{E}(\underline{k}(j), f_j) \rightarrow (B_{\text{dR}}^{\nabla+})_{f_{\underline{0}}^{(j)}}; x \mapsto x_{\underline{0}}$ est donc un isomorphisme de $(B_{\text{dR}}^{\nabla+})_{f_{\underline{0}}^{(j)}}$ -modules et $\mathcal{E}(\underline{k}(j), f_j)$ est un $(B_{\text{dR}}^{\nabla+})_{f_{\underline{0}}^{(j)}}$ -module libre de rang 1 tel que pour $x \in \mathcal{E}(\underline{k}(j), f_j)$, on a $x_{\underline{0}} = 0 \Rightarrow x = 0$. En particulier, comme $b_j \in \mathcal{E}(\underline{k}(j), f_j) \setminus \{0\}$, on a $b_{\underline{0}}^{(j)} \neq 0$. Il existe donc $m_j \in \mathbf{N}$ tel que $b_{\underline{0}}^{(j)} \in \text{Fil}^{m_j} B_{\text{dR}}^{\nabla} \setminus \text{Fil}^{m_j+1} B_{\text{dR}}^{\nabla}$. D'après ce qui précède, $b_{\underline{0}}^{(j)}$ divise $b_{\underline{n}}^{(j)}$ pour tout $\underline{n} \in \mathbf{N}^d$: on a $t^{-m_j} b_j \in B_{\text{dR}}^+$ et $c_j = \theta(t^{-m_j} b_j) \neq 0$. On a $g(c_j) = (\eta^{-1} \chi^{-m_j})(g) c_j$ pour tout $g \in \mathcal{G}_R$.

Rappelons (section 3.3) qu'on a un homomorphisme injectif \mathcal{G}_{R_0} -équivariant $\Psi: C \rightarrow \prod_{\mathfrak{p} \in T} C(\mathfrak{p})$, les composantes du produit étant permutées transitivement par \mathcal{G}_{R_0} .

Commençons par montrer que m_j est indépendant de j . Quitte à remplacer R par une extension finie, on peut supposer que $R[p^{-1}]/R_0[p^{-1}]$ est galoisienne. L'induite de V à \mathcal{G}_{R_0} se factorise par son abélianisé. Pour $\mathfrak{p} \in T$, on a donc $\Psi_{\mathfrak{p}}(c_j) \neq 0$ (composante d'indice \mathfrak{p} de $\Psi(c_j)$), car les composantes sont permutées transitivement par \mathcal{G}_{R_0} . Comme $g(c_j) = (\eta^{-1} \chi^{-m_j})(g) c_j$ pour tout $g \in \mathcal{G}_R$ donc pour tout $g \in \widehat{\mathcal{G}}_R(\mathfrak{p})$, le caractère $\eta \chi^{m_j}$ est $C(\mathfrak{p})$ -admissible pour $\mathfrak{p} \in T$. Cela implique (cf. [10, Proposition 3.4.2]) que m_j ne dépend pas de j : quitte à remplacer V par $V(m_j)$, on peut supposer que $m_j = 0$ pour tout j . Le caractère η est alors $C(\mathfrak{p})$ -admissible pour $\mathfrak{p} \in T$. D'après la « théorie de Sen généralisée » (cf. [9, Proposition 6]), l'action de l'inertie de $\widehat{\mathcal{G}}_R(\mathfrak{p})$ sur V est finie, et donc l'action de $I_{R_0}(\mathfrak{p}) \cap \widehat{\mathcal{G}}_R(\mathfrak{p})$ sur V est finie.

Comme $\mathbf{Z}_p^\times \simeq F \times (1 + p\mathbf{Z}_p)$, où F est un groupe fini, le caractère η s'écrit $\eta = \eta_f \eta_{\text{nr}}$ où η_f est d'ordre fini et η_{nr} est à valeurs dans $1 + p\mathbf{Z}_p$. L'action de $I_{R_0}(\mathfrak{p}) \cap \widehat{\mathcal{G}}_R(\mathfrak{p})$ étant finie et $1 + p\mathbf{Z}_p$ sans torsion, η_{nr} est trivial sur $I_{R_0}(\mathfrak{p}) \cap \widehat{\mathcal{G}}_R(\mathfrak{p})$ pour tout $\mathfrak{p} \in T$. D'après le corollaire 8.1.7, le caractère η_{nr} est R_0 -non ramifié.

Réciproquement, soit $\eta = \eta_f \eta_{\text{nr}} \chi^n$ avec η_f d'ordre fini, η_{nr} non ramifié et $n \in \mathbf{Z}$. D'après la proposition 8.1.1, η_f est $\overline{R}[p^{-1}]$ -admissible, donc de de Rham. D'après la proposition 8.2.14, η_{nr} est de de Rham. Comme χ^n est de de Rham pour tout $n \in \mathbf{Z}$, le caractère η est de de Rham d'après ce qui a été rappelé au début de cette section.

(ii) Supposons que V est R_0 -cristalline. Le caractère η est donc de de Rham d'après la proposition 8.2.13. D'après ce qui précède, il s'écrit donc $\eta = \eta_f \eta'_{\text{nr}} \chi^n$ avec η_f d'ordre fini, η'_{nr} R_0 -non ramifié à valeurs dans $1 + p\mathbf{Z}_p$ et $n \in \mathbf{Z}$. Comme η'_{nr} est à valeurs dans $1 + p\mathbf{Z}_p$, la démonstration de la proposition 8.1.3 montre que le cocycle η'_{nr} est trivialisé par un élément $b'_{\text{nr}} \in 1 + p\overline{R_0^{\text{nr}}}$. On a alors $b'_{\text{nr}} \in B_{\text{cris}}^\times$ vu que $\overline{R_0^{\text{nr}}} \subset A_{\text{cris}}$. On en déduit que η'_{nr}^{-1} est R_0 -cristallin. Par ailleurs, χ^{-n} est R_0 -cristallin. D'après ce qui a été rappelé au début de cette section, comme la condition (BR) est remplie, le caractère $\eta_f = \eta \eta'_{\text{nr}}^{-1} \chi^{-n}$ est R_0 -cristallin. Soit $N \in \mathbf{N}_{>0}$ tel que $\eta_f^N = 1$. Le caractère $\eta_f^{-1} = \eta_f^{N-1}$ est R_0 -cristallin.

Montrons que le caractère η_f est aussi \widetilde{R} -non ramifié. Rappelons (section 6.2) qu'on a un plongement \mathcal{G}_{R_0} -équivariant $\Psi: B_{\text{cris}} \rightarrow \prod_{\mathfrak{p} \in T} B_{\text{cris}}(\mathfrak{p})$, le groupe \mathcal{G}_{R_0} permutant les composantes du produit de façon transitive. La

restriction du caractère η_f à chacun des groupes $\widehat{\mathcal{G}}_R(\mathfrak{p})$ est donc cristalline et d'ordre fini. Elle est donc triviale sur $I_{R_0}(\mathfrak{p}) \cap \widehat{\mathcal{G}}_R(\mathfrak{p})$ d'après [10, Proposition 3.4.2]. Comme c'est vrai pour tout $\mathfrak{p} \in T$, le caractère η_f est R_0 -non ramifié d'après le corollaire 8.1.7, le caractère η_{nr} est R_0 -non ramifié.

Le caractère $\eta_{\text{nr}} = \eta_f \eta'_{\text{nr}}$ est alors R_0 -non ramifié. On a donc $\eta = \eta_{\text{nr}} \chi^n$ avec η_{nr} R_0 -non ramifié et $n \in \mathbf{Z}$.

Réciproquement, soit $\eta = \eta_{\text{nr}} \chi^n$ avec η_{nr} R_0 -non ramifié et $n \in \mathbf{Z}$. D'après la proposition 8.2.14, η_{nr} est R_0 -cristallin. Comme χ^n est R_0 -cristallin pour tout $n \in \mathbf{Z}$, le caractère η est R_0 -cristallin. \square

Théorème 8.4.2. — La catégorie $\mathbf{Rep}_{\text{dR}}(\mathcal{G}_R)$ (resp. $\mathbf{Rep}_{\text{dR}}^{\nabla}(\mathcal{G}_R)$) est une sous-catégorie tannakienne de $\mathbf{Rep}_{\mathbf{Q}_p}(\mathcal{G}_R)$, et la restriction du foncteur D_{dR} à $\mathbf{Rep}_{\text{dR}}(\mathcal{G}_R)$ (resp. de D_{dR}^{∇} à $\mathbf{Rep}_{\text{dR}}^{\nabla}(\mathcal{G}_R)$) est un $R[p^{-1}]$ -foncteur fibre (resp. un K -foncteur fibre). Si la condition (BR) est remplie, la catégorie $\mathbf{Rep}_{R_0\text{-cris}}(\mathcal{G}_R)$ (resp. $\mathbf{Rep}_{R_0\text{-cris}}^{\nabla}(\mathcal{G}_R)$) est une sous-catégorie tannakienne de $\mathbf{Rep}_{\mathbf{Q}_p}(\mathcal{G}_R)$, et la restriction du foncteur D_{cris} à $\mathbf{Rep}_{R_0\text{-cris}}(\mathcal{G}_R)$ (resp. de D_{cris}^{∇} à $\mathbf{Rep}_{R_0\text{-cris}}^{\nabla}(\mathcal{G}_R)$) est un $R_0[p^{-1}]$ -foncteur fibre (resp. un $W[p^{-1}]$ -foncteur fibre).

Démonstration. — Cela résulte du fait que B_{dR} , B_{cris} , B_{dR}^{∇} et B_{cris}^{∇} sont \mathcal{G}_R -réguliers (cf. [10, Définition 3.1.8]). La propriété (i) de la définition résulte des théorèmes 5.4.1 pour B_{dR} , du théorème 6.3.8 pour B_{cris} et est évidente pour B_{dR}^{∇} et B_{cris}^{∇} parce que K et $W[p^{-1}]$ sont des corps. La propriété (ii) est l'objet des propositions 8.2.4, 8.2.6

et 8.2.9 et la propriété (iii) est évidente. Reste à prouver la propriété (iv). Soit V une représentation p -adique de \mathcal{G}_R de dimension 1. Elle est donnée par un homomorphisme continu $\eta: \mathcal{G}_R \rightarrow \mathbf{Z}_p^\times$.

Supposons η de de Rham (resp. R_0 -cristallin). D'après la proposition 8.4.1 et sa preuve, η peut s'écrire $\eta = \eta_f \eta_{nr} \chi^n$ (resp. $\eta = \eta_{nr} \chi^n$) où η_f est un caractère d'ordre fini, η_{nr} un caractère R_0 -non ramifié à valeur dans $1 + p\mathbf{Z}_p$ et $n \in \mathbf{Z}$. On a vu au cours de la preuve de la proposition 8.4.1 que le caractère η_{nr}^{-1} est lui aussi R_0 -non ramifié (parce qu'il est trivialisé par un élément de $1 + p\widehat{R_0^{\text{nr}}} \subset A_{\text{cris}}^\times$), donc de de Rham (resp. R_0 -cristallin) d'après la proposition 8.2.14. Comme η_f est d'ordre fini, on a $N \in \mathbf{N}_{>0}$ tel que $\eta_f^N = 1$ et donc $\eta_f^{-1} = \eta_f^{N-1}$ est de de Rham, d'après ce qu'on a rappelé au début de la section. Par ailleurs, le caractère χ^{-n} est R_0 -cristallin (donc aussi de de Rham d'après la proposition 8.2.13). Le caractère $\eta^{-1} = \eta_f^{-1} \eta_{nr}^{-1} \chi^{-n}$ (resp. $\eta^{-1} = \eta_{nr}^{-1} \chi^{-n}$) est donc de de Rham (resp. R_0 -cristallin). En particulier, en vertu de [10, Proposition 3.1.7], on a des isomorphismes $D_{\text{dR}}(V) \simeq \text{Hom}_{R[p^{-1}]}(D_{\text{dR}}(V), R[p^{-1}])$ et $D_{\text{cris}}(V) \simeq \text{Hom}_{R_0[p^{-1}]}(D_{\text{cris}}(V), R_0[p^{-1}])$ pour toute représentation de de Rham (resp. cristalline).

Supposons η de de Rham horizontal (resp. R_0 -cristallin horizontal). La représentation V est de de Rham (resp. R_0 -cristalline) d'après la proposition 8.2.10. Il en est donc de même de V^\vee d'après ce qui précède. D'après la proposition 8.2.10, il s'agit de montrer que la connexion sur $D_{\text{dR}}(V^\vee)$ (resp. $D_{\text{cris}}(V^\vee)$) est triviale.

L'homomorphisme naturel $\beta_{\text{dR}}: R[p^{-1}] \otimes_K D_{\text{dR}}^\nabla(V) \rightarrow D_{\text{dR}}(V)$ (resp. $\beta_{\text{cris}}: R_0[p^{-1}] \otimes_{W[p^{-1}]} D_{\text{cris}}^\nabla(V) \rightarrow D_{\text{cris}}(V)$) est un isomorphisme (proposition 8.2.10). On en déduit un isomorphisme

$$\text{Hom}_{R[p^{-1}]}(D_{\text{dR}}(V), R[p^{-1}]) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{R[p^{-1}]}(R[p^{-1}] \otimes_K D_{\text{dR}}^\nabla(V), R[p^{-1}])$$

(resp. $\text{Hom}_{R_0[p^{-1}]}(D_{\text{cris}}(V), R_0[p^{-1}]) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{R_0[p^{-1}]}(R_0[p^{-1}] \otimes_{W[p^{-1}]} D_{\text{cris}}^\nabla(V), R_0[p^{-1}])$) de $R[p^{-1}]$ -modules (resp. $R_0[p^{-1}]$ -modules) à connexion. Comme K et $W[p^{-1}]$ sont des corps, on a

$$\text{Hom}_{R[p^{-1}]}(R[p^{-1}] \otimes_K D_{\text{dR}}^\nabla(V), R[p^{-1}]) \simeq R[p^{-1}] \otimes_K \text{Hom}_K(D_{\text{dR}}^\nabla(V), K)$$

(resp. $\text{Hom}_{R_0[p^{-1}]}(R_0[p^{-1}] \otimes_{W[p^{-1}]} D_{\text{cris}}^\nabla(V), W[p^{-1}]) \simeq R_0[p^{-1}] \otimes_{W[p^{-1}]} \text{Hom}_{W[p^{-1}]}(D_{\text{cris}}^\nabla(V), W[p^{-1}])$). On a donc un isomorphisme

$$D_{\text{dR}}(V^\vee) \xrightarrow{\sim} R[p^{-1}] \otimes_K \text{Hom}_K(D_{\text{dR}}^\nabla(V), K)$$

(resp. $D_{\text{cris}}(V^\vee) \xrightarrow{\sim} R_0[p^{-1}] \otimes_{W[p^{-1}]} \text{Hom}_{W[p^{-1}]}(D_{\text{cris}}^\nabla(V), W[p^{-1}])$) de modules à connexion sur $R[p^{-1}]$ (resp. $R_0[p^{-1}]$). La connexion sur $D_{\text{dR}}(V^\vee)$ (resp. $D_{\text{cris}}(V^\vee)$) est donc triviale, ce qu'on voulait. \square

Proposition 8.4.3. — *Soit V est une représentation p -adique de de Rham (resp. de de Rham horizontale), l'isomorphisme $\alpha_{\text{dR}}(V): B_{\text{dR}} \otimes_{R[p^{-1}]} D_{\text{dR}}(V) \rightarrow B_{\text{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$ (resp. $\alpha_{\text{dR}}^\nabla(V): B_{\text{dR}} \otimes_K D_{\text{dR}}^\nabla(V) \rightarrow B_{\text{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$) est compatible aux structures supplémentaires décrites dans la section 8.3. De même, les isomorphismes et suites exactes qu'on déduit du fait que D_{dR} (resp. D_{dR}^∇) induit un $R[p^{-1}]$ -foncteur fibre (resp. un K -foncteur fibre) sur la catégorie $\mathbf{Rep}_{\text{dR}}(\mathcal{G}_R)$ (resp. $\mathbf{Rep}_{\text{dR}}^\nabla(\mathcal{G}_R)$) respectent les structures supplémentaires. Même énoncé avec les représentations R_0 -cristallines et R_0 -cristallines horizontales lorsque la condition (BR) est remplie.*

Démonstration. — Le point non trivial est la stricte compatibilité aux filtrations. On dispose du foncteur \mathbf{gr}_R qui à un $R[p^{-1}]$ -module filtré associe son gradué. C'est un foncteur exact de la catégorie des $R[p^{-1}]$ -modules filtrés vers la catégorie des $R[p^{-1}]$ -modules gradués. En outre, il commute au produit tensoriel. On a (corollaire 5.2.7) $B_{\text{HT}} := \mathbf{gr}_R(B_{\text{dR}})$. D'après la proposition 8.2.5 (Hyodo [37, Proposition 2.1]), pour toute représentation p -adique V , l'homomorphisme naturel $\alpha_{\text{HT}}(V): B_{\text{HT}} \otimes_{R[p^{-1}]} D_{\text{HT}}(V) \rightarrow B_{\text{HT}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$ est injectif, où $D_{\text{HT}}(V) = (B_{\text{HT}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\mathcal{G}_R}$.

Soit V une représentation p -adique de de Rham. On a $\mathbf{gr}_R(D_{\text{dR}}) = D_{\text{HT}}(V)$ et le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{gr}_R(B_{\text{dR}} \otimes_{R[p^{-1}]} D_{\text{dR}}(V)) & \longrightarrow & \mathbf{gr}_R(B_{\text{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V) \\ \parallel & & \parallel \\ \mathbf{gr}_R(B_{\text{dR}}) \otimes_{R[p^{-1}]} \mathbf{gr}_R(D_{\text{dR}}) & \xrightarrow{\alpha_{\text{HT}}(V)} & B_{\text{HT}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V. \end{array}$$

L'injectivité de $\alpha_{\text{HT}}(V)$ implique celle de l'application $\mathbf{gr}_R(B_{\text{dR}} \otimes_{R[p^{-1}]} D_{\text{dR}}(V)) \rightarrow \mathbf{gr}_R(B_{\text{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)$ et donc la stricte compatibilité de $\alpha_{\text{dR}}(V)$ aux filtrations.

Soient V_1 et V_2 deux représentations p -adiques de de Rham. Montrons que l'isomorphisme

$$D_{\text{dR}}(V_1) \otimes_{R[p^{-1}]} D_{\text{dR}}(V_2) \xrightarrow{\sim} D_{\text{dR}}(V_1 \otimes_{\mathbf{Q}_p} V_2)$$

est compatible aux filtrations. On a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} B_{\text{dR}} \otimes_{R[p^{-1}]} D_{\text{dR}}(V_1) \otimes_{R[p^{-1}]} D_{\text{dR}}(V_2) & \longrightarrow & B_{\text{dR}} \otimes_{R[p^{-1}]} D_{\text{dR}} \text{big}(V_1 \otimes_{\mathbf{Q}_p} V_2) \\ \alpha_{\text{dR}}(V_1) \otimes \alpha_{\text{dR}}(V_2) \downarrow & & \downarrow \alpha_{\text{dR}}(V_1 \otimes_{\mathbf{Q}_p} V_2) \\ (B_{\text{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V_1) \otimes_{B_{\text{dR}}} (B_{\text{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V_2) & \longrightarrow & B_{\text{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V_1 \otimes_{\mathbf{Q}_p} V_2 \end{array}$$

où $\alpha_{\mathrm{dR}}(V_1) \otimes \alpha_{\mathrm{dR}}(V_2)$ et $\alpha_{\mathrm{dR}}(V_1 \otimes_{\mathbf{Q}_p} V_2)$ sont des isomorphismes de modules filtrés sur $R[p^{-1}]$ d'après ce qui précède. Il en est donc de même de l'homomorphisme

$$\mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{R[p^{-1}]} \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V_1) \otimes_{R[p^{-1}]} \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V_2) \rightarrow \mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{R[p^{-1}]} \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V_1 \otimes_{\mathbf{Q}_p} V_2).$$

En passant aux gradués, on a un isomorphisme

$$\mathrm{B}_{\mathrm{HT}} \otimes_{R[p^{-1}]} \mathbf{gr}_R(\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V_1) \otimes_{R[p^{-1}]} \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V_2)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{B}_{\mathrm{HT}} \otimes_{R[p^{-1}]} \mathbf{gr}_R(\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V_1 \otimes_{\mathbf{Q}_p} V_2))$$

et donc un isomorphisme $\mathbf{gr}_R(\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V_1) \otimes_{R[p^{-1}]} \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V_2)) \xrightarrow{\sim} \mathbf{gr}_R(\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V_1 \otimes_{\mathbf{Q}_p} V_2))$ par fidèle platitude de B_{HT} sur $R[p^{-1}]$ (théorème 3.2.3), ce qu'on voulait.

Raisonnement analogue pour le dual. \square

8.5. Pleine fidélité du foncteur $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}$, admissibilité

Soit D un module filtré sur R . Le $R[p^{-1}]$ -module $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{R[p^{-1}]} D$ est alors muni d'une filtration donnée par

$$\mathrm{Fil}^r(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{R[p^{-1}]} D) = \sum_{s \in \mathbf{Z}} \mathrm{Im}(\mathrm{Fil}^s \mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{R[p^{-1}]} \mathrm{Fil}^{r-s} D \rightarrow \mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{R[p^{-1}]} D)$$

pour $r \in \mathbf{Z}$. Il est aussi muni d'une connexion donnée par $\nabla(b \otimes d) = d \otimes \nabla(b) + b \otimes \nabla(d)$. Elle induit une connexion sur le sous- $R_0[p^{-1}]$ -module $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}} \otimes_{R_0[p^{-1}]} D$. Ce dernier est aussi muni d'un Frobenius donné par $\varphi(b \otimes d) = \varphi(b) \otimes \varphi(d)$.

Définition 8.5.1. — Si D est un module filtré sur $R[p^{-1}]$, on pose :

$$\mathrm{V}_{\mathrm{cris}}(D) = (\mathrm{B}_{\mathrm{cris}} \otimes_{R_0[p^{-1}]} D)^{\varphi=1}_{\nabla=0} \cap \mathrm{Fil}^0((\mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{R[p^{-1}]} D)^{\nabla=0}).$$

On obtient ainsi un foncteur de la catégorie $\mathbf{MF}_{R/R_0}(\varphi, \nabla)$ dans la catégorie des \mathbf{Q}_p -espaces vectoriels topologiques munis d'une action linéaire continue de \mathcal{G}_R .

Notation. On note $\mathbf{MF}_{R/R_0}^{\mathrm{a}}(\varphi, \nabla)$ l'image essentielle du foncteur

$$\mathrm{D}_{\mathrm{cris}} : \mathbf{Rep}_{R_0\text{-cris}}(\mathcal{G}_R) \rightarrow \mathbf{MF}_{R/R_0}(\varphi, \nabla).$$

Ses objets sont appelés les (φ, ∇) -modules filtrés admissibles.

Théorème 8.5.2. — *Supposons la condition (BR) remplie.*

- (i) La catégorie $\mathbf{MF}_{R/R_0}^{\mathrm{a}}(\varphi, \nabla)$ est abélienne.
- (ii) Si D_1 et D_2 sont deux modules filtrés admissibles sur R , il en est de même de $D_1 \otimes D_2$ (vu comme objet de $\mathbf{MF}_{R/R_0}(\varphi, \nabla)$). De même, si D est un module filtré admissible sur R , son dual D^\vee l'est encore (vu comme objet de $\mathbf{MF}_{R/R_0}(\varphi, \nabla)$).
- (iii) Munie de ces structures, la catégorie $\mathbf{MF}_{R/R_0}^{\mathrm{a}}(\varphi, \nabla)$ est tannakienne.
- (iv) Le foncteur $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}$ induit une équivalence de catégories tannakiennes $\mathbf{Rep}_{R_0\text{-cris}}(\mathcal{G}_R) \xrightarrow{\sim} \mathbf{MF}_{R/R_0}^{\mathrm{a}}(\varphi, \nabla)$ et le foncteur induit par $\mathrm{V}_{\mathrm{cris}}$ est un quasi-inverse.

Démonstration. — (cf. [10, Théorème 4.2.2]) Soit $V \in \mathbf{Rep}_{R_0\text{-cris}}(\mathcal{G}_R)$. Par définition, $\alpha_{\mathrm{cris}}(V) : \mathrm{B}_{\mathrm{cris}} \otimes_{R_0[p^{-1}]} \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V) \xrightarrow{\sim} \mathrm{B}_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$ est un isomorphisme de $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}$ -modules, et a fortiori $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{R[p^{-1}]} \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V) \xrightarrow{\sim} \mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$. On a alors

$$\mathrm{V}_{\mathrm{cris}}(\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)) = (\mathrm{B}_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\varphi=1}_{\nabla=0} \cap \mathrm{Fil}^0(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\nabla=0} \simeq (\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}^{\varphi=1}_{\nabla=0} \cap \mathrm{Fil}^0 \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla=0}) \otimes_{\mathbf{Q}_p} V.$$

D'après le corollaire 6.2.19, on a $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}^{\varphi=1}_{\nabla=0} \cap \mathrm{Fil}^0 \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla=0} = \mathbf{Q}_p$. L'application naturelle $V \rightarrow \mathrm{V}_{\mathrm{cris}}(\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V))$ est donc un isomorphisme. On en déduit la pleine fidélité du foncteur induit par $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}$ et le fait que $\mathrm{V}_{\mathrm{cris}}$ induit un foncteur quasi-inverse.

L'assertion (i) découle de la pleine fidélité du foncteur induit par $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}$. Le théorème 8.4.2 affirme que la restriction du foncteur $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}$ à $\mathbf{Rep}_{R_0\text{-cris}}(\mathcal{G}_R)$ est un $R_0[p^{-1}]$ -foncteur fibre. Les assertions (ii), (iii) et (iv) en résultent. \square

Proposition 8.5.3. — *On suppose la condition (BR) remplie. Soit V une représentation p -adique R_0 -cristalline. Alors $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V) \in \mathbf{MF}_{R/R_0}(\varphi, \nabla)$ est ponctuellement faiblement admissible.*

Démonstration. — Posons $D = D_{\text{cris}}(V)$. Soit $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R_0/pR_0)$ et $(W(\kappa), pW(\kappa), \gamma, s)$ un objet-test tel que κ est parfait et $\mathfrak{p} = \text{Ker}(s)$. Le Frobenius σ sur R_0 étant donné, s induit un homomorphisme $R_0 \rightarrow W(\kappa)$, et donc un homomorphisme $s: B_{\text{cris}}(R_0) \rightarrow B_{\text{cris}}(W(\kappa))$ (ce dernier envoie u_i sur 0 pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$), et donc un morphisme $D \rightarrow D_{\text{cris}, W(\kappa)}(V) = (B_{\text{cris}}(W(\kappa)) \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^G$, où $G = \mathcal{G}_{W(\kappa)} \cap \mathcal{G}_R$. On a alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc} B_{\text{cris}}(W(\kappa)) \otimes_{W(\kappa)[p^{-1}]} D_{(W(\kappa), pW(\kappa), \gamma, s)} & \xrightarrow{B_{\text{cris}}(W(\kappa)) \otimes_{\alpha_{\text{cris}}(V)}} & B_{\text{cris}}(W(\kappa)) \otimes_{\mathbf{Q}_p} V \\ & \searrow_{B_{\text{cris}}(W(\kappa)) \otimes s} & \nearrow_{\alpha_{\text{cris}, W(\kappa)}(V)} \\ & B_{\text{cris}}(W(\kappa)) \otimes_{W(\kappa)[p^{-1}]} D_{\text{cris}, W(\kappa)}(V) & \end{array}$$

Comme $\alpha_{\text{cris}}(V)$ est un isomorphisme, il en est de même de $B_{\text{cris}}(W(\kappa)) \otimes_{\alpha_{\text{cris}}(V)}$ donc $\alpha_{\text{cris}, W(\kappa)}(V)$ est surjectif. Comme il est injectif, c'est un isomorphisme et V est cristalline comme représentation de G . Le φ -module filtré $D_{\text{cris}, W(\kappa)}(V)$ est donc faiblement admissible d'après [28, Proposition 5.4.2] (ou [10, Proposition 4.2.4]). Par ailleurs, l'homomorphisme $B_{\text{cris}}(W(\kappa)) \otimes_{W(\kappa)[p^{-1}]} D_{(W(\kappa), pW(\kappa), \gamma, s)} \rightarrow B_{\text{cris}}(W(\kappa)) \otimes_{W(\kappa)[p^{-1}]} D_{\text{cris}, W(\kappa)}(V)$ est bijectif : il en est de même de $D_{(W(\kappa), pW(\kappa), \gamma, s)} \rightarrow D_{\text{cris}, W(\kappa)}(V)$ et $D_{(W(\kappa), pW(\kappa), \gamma, s)}$ est faiblement admissible. \square

8.6. Cas des caractères

Dans toute cette partie, on suppose la condition (BR) remplie.

Proposition 8.6.1. — *Soit V une représentation p -adique R_0 -cristalline de dimension 1. Il existe un revêtement fini étale $R_0 \rightarrow R'_0$ tel que le $R'_0[p^{-1}]$ -module $R'_0[p^{-1}] \otimes_{R_0[p^{-1}]} D_{\text{cris}}(V)$ est libre.*

Démonstration. — On a $V = \mathbf{Q}_p v$, l'action de \mathcal{G}_R étant donnée par $g.v = \eta^{-1}(g)v$ où $\eta: \mathcal{G}_R \rightarrow \mathbf{Z}_p^\times$ est un caractère continu. Si la représentation V est R_0 -cristalline, on a une écriture $\eta = \eta_f \eta_{\text{nr}} \chi^n$ où η_f est R_0 -non ramifié d'ordre fini, η_{nr} est R_0 -non ramifié à valeurs dans $1 + p\mathbf{Z}_p$, trivialisé par un élément $\alpha \in 1 + p\widehat{R_0^{\text{nr}}}$ (proposition 8.4.1).

Soit $D = D_{\text{cris}}(V)$. On a alors $D = \{b \otimes v, b \in B_{\text{cris}}, g(b)\eta_f^{-1}(g)\eta_{\text{nr}}^{-1}(g)\chi^{-n}(g) = b\}$ soit $D = \{b \otimes v, b \in B_{\text{cris}}, g(\alpha^{-1}t^{-n}b) = \eta_f(g)\alpha^{-1}t^{-n}b\}$ et donc $D = \alpha t^n D'$ avec $D' = D_{\text{cris}}(\eta_f^{-1}) = \{b' \in B_{\text{cris}}, g(b') = \eta_f(g)b'\}$. On sait (cf. proposition 8.3.1) que D' est un $R_0[p^{-1}]$ -module projectif de rang 1.

Le caractère η_f se factorise à travers un quotient fini \mathcal{G}_R/G' de \mathcal{G}_R , avec $I'_{R_0} = \text{Ker}(\mathcal{G}_R \rightarrow J_{R_0}) \subseteq G'$ (car η_f est R_0 -non ramifié). Soit $R'_0 = \overline{R}^{G'}$. C'est un revêtement fini étale de R_0 . Par ailleurs, on a $D_{R'_0} = R'_0[p^{-1}] \otimes_{R_0[p^{-1}]} D$ est libre de rang 1 sur $R'_0[p^{-1}]$. \square

Proposition 8.6.2. — *Soit D un (φ, ∇) -module filtré sur $R[p^{-1}]$ relativement à $R_0[p^{-1}]$, de rang 1. Supposons qu'il existe un revêtement fini étale $R_0 \rightarrow R'_0$ tel que le $R'_0[p^{-1}]$ -module $D_{R'_0} = R'_0 \otimes_{R_0} D$ est libre. Supposons que $t_N(D) = t_N(D, \mathfrak{p})$ est indépendant de $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R_0/pR_0)$. Alors*

$$\dim_{\mathbf{Q}_p}(V_{\text{cris}}(D)) = \begin{cases} 0 & \text{si } t_N(D) > t_H(D) \\ 1 & \text{si } t_N(D) = t_H(D) \\ +\infty & \text{si } t_N(D) < t_H(D) \end{cases}$$

Démonstration. — Le revêtement fini étale $R_0 \rightarrow R'_0$ correspond à un sous-groupe ouvert G' de \mathcal{G}_R . On a $V_{\text{cris}}(D) = (B_{\text{cris}} \otimes_{R_0[p^{-1}]} D)^{\varphi=1, \nabla=0} \cap \text{Fil}^0(B_{\text{dR}} \otimes_{R_0[p^{-1}]} D)$. Comme $B_{\text{cris}} \otimes_{R_0[p^{-1}]} D = B_{\text{cris}} \otimes_{R'_0[p^{-1}]} D'$ et $B_{\text{dR}} \otimes_{R_0[p^{-1}]} D = B_{\text{dR}} \otimes_{R'_0[p^{-1}]} D'$ avec $D' = D_{R'_0} = R'_0[p^{-1}] \otimes_{R_0[p^{-1}]} D$, on a $V_{\text{cris}}(D) = V_{\text{cris}}(D')$ (comme \mathbf{Q}_p -vectoriel). Quitte à remplacer D par D' (donc R_0 par $R'_0 = \overline{R}^{G'}$, etc), on peut supposer que D est libre sur $R_0[p^{-1}]$.

On a alors $D = R_0[p^{-1}]d$, et $\varphi(d) = \lambda d$. Comme $\varphi(D)$ engendre D , on a $\lambda \in (R_0[p^{-1}])^\times$. Notons $r = t_N(D)$, c'est un entier rationnel. Écrivons $\lambda = p^r \lambda_0$. Pour tout $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R_0/pR_0)$, l'image de λ_0 par tout plongement $R_0[p^{-1}] \rightarrow W(\kappa)[p^{-1}]$ (où κ est un corps parfait) est de valuation nulle. Il en résulte que $\lambda_0 \in R_0$. Comme c'est aussi le cas pour λ_0^{-1} , on a en fait $\lambda_0 \in R_0^\times$.

Notons $s = t_H(D)$. On a $\text{Fil}^j D_R = D_R$ si $j \leq s$ et $\text{Fil}^j D_R = 0$ si $j > s$. On a

$$\begin{aligned} V_{\text{cris}}(D) &= (B_{\text{cris}} \otimes_{R_0[p^{-1}]} D)^{\varphi=1, \nabla=0} \cap \text{Fil}^0(B_{\text{dR}} \otimes_{R_0[p^{-1}]} D) \\ &= \{b \otimes d, b \in B_{\text{cris}}, \varphi(b) \otimes \lambda d = b \otimes d, \nabla(b \otimes d) = 0, b \otimes d \in \text{Fil}^0(B_{\text{dR}} \otimes_{R_0[p^{-1}]} D)\} \\ &\simeq \{b \in B_{\text{cris}}, \varphi(b)p^r \lambda_0 = b, \nabla(b \otimes d) = 0, b \in \text{Fil}^{-s}(B_{\text{dR}})\} \\ &\simeq t^{-r} \{b_0 \in B_{\text{cris}}, \varphi(b_0)\lambda_0 = b_0, \nabla(b_0 \otimes d) = 0, b_0 \in \text{Fil}^{r-s}(B_{\text{dR}})\} \end{aligned}$$

avec $b = t^{-r}b_0$ dans le dernier isomorphisme (rappelons que t est horizontal pour la connexion). On va se ramener au cas où $\lambda_0 = 1$.

Soit $P(X) = X^{p-1} - \lambda_0$, et $\alpha_0 \in \overline{\text{Frac}(R)}$ une racine de P . On a $P'(\alpha_0) = (p-1)\alpha_0^{p-2} \in R_0[\alpha_0]^\times$ car $\alpha_0^{p-1} = \lambda_0$ est inversible dans R_0 . L'anneau $R_0[\alpha_0]$ est donc une R_0 -algèbre étale, et donc $\alpha_0 \in R_0^{\text{nr}\times}$.

Soit $b_0 \in \text{B}_{\text{cris}}$ tel que $\varphi(b_0)\lambda_0 = b_0$. Posons $b_1 = \alpha_0 b_0$. On a $\varphi(b_1) = \varphi(\alpha_0)\lambda_0^{-1}b_0$. Posons $\lambda_1 = \alpha_0\varphi(\alpha_0)^{-1}\lambda_0 \in R_0^\times$. On a $\varphi(b_1)\lambda_1 = b_1$. Par ailleurs, on a $\varphi(\alpha_0) \equiv \alpha_0^p \pmod{pR_0}$, donc $\lambda_1^{-1} \equiv 1 \pmod{pR_0}$ i.e. $\lambda_1 \equiv 1 \pmod{pR_0}$.

À partir de α_0 et b_0 , on construit des suites $(\alpha_n)_{n \in \mathbf{N}} \in R_0^{\text{nr}\mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \text{B}_{\text{cris}}^{\text{nr}}$ vérifiant les propriétés suivantes

- (a) Pour $n \in \mathbf{N}_{>0}$, on a $\alpha_n \in 1 + p^n R_0^{\text{nr}}$,
- (b) Pour $n \in \mathbf{N}$, on a $b_{n+1} = \alpha_n b_n$,
- (c) Pour $n \in \mathbf{N}$, on a $\varphi(b_n)\lambda_n = b_n$ avec $\lambda_n \in 1 + p^n R_0^{\text{nr}}$,

de la façon suivante : si $n \in \mathbf{N}_{>0}$, et si α_{n-1} et b_n sont construits, on écrit $\lambda_n = 1 + p^n \mu_n$ avec $\mu_n \in R_0^{\text{nr}}$. Soit $Q_n(X) = X^p - X + \mu_n$ et $\beta_n \in \overline{\text{Frac}(R)}$ une racine de Q_n . On a $Q'_n(\beta_n) = p\beta_n^{p-1} - 1 \in R_0'[\beta_n]^\times$ (où R_0' est une R_0 -algèbre finie étale qui contient μ_n). L'anneau $R_0'[\beta_n]$ est donc une R_0 -algèbre étale, et donc $\beta_n \in R_0^{\text{nr}}$. Posons

$$\begin{aligned} \alpha_n &= 1 - p^n \beta_n \in 1 + p^n R_0^{\text{nr}} \\ b_{n+1} &= \alpha_n b_n \\ \lambda_{n+1} &= \alpha_n \varphi(\alpha_n)^{-1} \lambda_n \end{aligned}$$

On a $\varphi(b_n)\lambda_n = b_n$ donc $\varphi(b_{n+1})\lambda_{n+1} = b_{n+1}$. Par ailleurs, on a

$$\lambda_{n+1} = (1 - p^n \beta_n)(1 - p^n \varphi(\beta_n))^{-1}(1 + p^n \mu_n) \equiv 1 + p^n(\varphi(\beta_n) - \beta_n + \mu_n) \pmod{p^{2n} R_0^{\text{nr}}}$$

Comme $\varphi(\beta_n) \equiv \beta_n^p \pmod{pR_0^{\text{nr}}}$ et $2n \geq n+1$ (car $n > 0$), on a $\lambda_{n+1} \equiv 1 + p^n(\beta_n^p - \beta_n + \mu_n) + p^{n+1} R_0^{\text{nr}}$ et donc $\lambda_{n+1} \in 1 + p^{n+1} R_0^{\text{nr}}$.

Posons alors $\alpha = \prod_{n=0}^{\infty} \alpha_n$. Comme $\alpha_0 \in R_0^{\text{nr}\times}$ et $\alpha_n \in 1 + p^n R_0^{\text{nr}}$ pour $n > 0$, le produit converge dans $\widehat{R_0^{\text{nr}}}$.

Notons que la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbf{N}}$, et donc α , ne dépendent que de α_0 et de λ_0 (car on construit α_n à partir de λ_n et λ_{n+1} à partir de λ_n et α_n), et pas de la suite $(b_n)_{n \in \mathbf{N}}$. Par ailleurs, la suite $(b_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers l'élément $b' = \alpha b_0$ dans B_{cris} . Par construction, on a $\varphi(b') = b'$.

Notons que comme $\theta(\alpha) = \alpha \neq 0$, on a $\alpha \in \text{Fil}^0(\text{B}_{\text{dR}}) - \text{Fil}^1(\text{B}_{\text{dR}})$, et $b_0 \in \text{Fil}^{r-s}(\text{B}_{\text{dR}}) \Leftrightarrow b' \in \text{Fil}^{r-s}(\text{B}_{\text{dR}})$. On a

$$\text{V}_{\text{cris}}(D) \simeq \alpha^{-1} t^{-r} \{b' \in \text{B}_{\text{cris}}, \varphi(b') = b', \nabla(b' \otimes \alpha^{-1} d) = 0, b' \in \text{Fil}^{r-s}(\text{B}_{\text{dR}})\}.$$

Soit $b' \in \text{B}_{\text{cris}}$ tel que $\nabla(b' \otimes \alpha^{-1} d) = 0$. Pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$, on a $N_i(b' \alpha^{-1} d) = 0$ i.e. $\alpha^{-1} N_i(b') + b' N_i(\alpha^{-1}) k_i = 0$ (où $k_i \in R_0[p^{-1}]$ ne dépend que de α et d). On a donc $N_i(b') = k'_i b'$ avec $k'_i \in \widehat{R_0^{\text{nr}}}[p^{-1}]$. Mais pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$ et tout $n \in \mathbf{N}_{>0}$, il existe des éléments $(\theta_{ij}^{(n)})_{1 \leq j \leq d} \in R_0^d$ tels que

$$N_i \varphi^n = p^n \sum_{j=1}^d \theta_{ij}^{(n)} \varphi^n N_j.$$

En effet, pour $n = 1$, on a $\sum_{i=1}^d N_i \varphi \otimes d \log(T_i) = \nabla \varphi = \varphi \nabla = \sum_{i=1}^d \varphi N_i d \log(\sigma(T_i))$ (proposition 8.3.4) et $d \log(\sigma(T_i)) \in p \widehat{\Omega}_{R_0}^1$ vu que $\sigma(T_i) \equiv T_i^p \pmod{pR_0}$. Le cas $n > 0$ s'en déduit par une récurrence immédiate.

Ainsi, on a $N_i \varphi^n(b') = p^n \sum_{j=1}^d \theta_{ij}^{(n)} \varphi^n(k'_j b')$ i.e. $k'_i b' = p^n \sum_{j=1}^d \theta_{ij}^{(n)} \varphi^n(k'_j) b'$. Si $b' \neq 0$, on a donc $k'_i = p^n \sum_{j=1}^d \theta_{ij}^{(n)} \varphi^n(k'_j)$ (d'après les propositions 5.2.3 et 5.2.4, les éléments de $\widehat{R_0^{\text{nr}}}[p^{-1}] \setminus \{0\}$ ne sont pas diviseurs de zéro dans B_{cris}). Si $b' \neq 0$, on a donc $k'_i = 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$ car R_0 est séparé pour la topologie p -adique. Dans tous les cas, on a $N_i(b') = k'_i b' = 0$, i.e. $\nabla(b') = 0$. On a donc

$$\text{V}_{\text{cris}}(D) \simeq \alpha^{-1} t^{-r} \text{B}_{\text{cris}}^{\varphi=1, \nabla=0} \cap \text{Fil}^{r-s}(\text{B}_{\text{dR}}) = \begin{cases} 0 & \text{si } r - s > 0 \\ \mathbf{Q}_p \alpha^{-1} t^{-r} & \text{si } r - s = 0 \\ \text{un } \mathbf{Q}_p\text{-vectoriel de dimension infinie} & \text{si } r - s < 0 \end{cases}$$

ce qu'on voulait. \square

Il résulte du théorème 8.5.2, des proposition 8.6.1 et 8.6.2 que lorsque la condition (BR) est remplie, le foncteur D_{cris} induit une équivalence entre la catégorie des caractères cristallins et celle des (φ, ∇) -modules filtrés

sur $R[p^{-1}]$ relativement à $R_0[p^{-1}]$ qui sont ponctuellement faiblement admissibles et qui se « libèrent » après une extension finie étale $R_0 \rightarrow R'_0$.

Si D est un (φ, ∇) -module filtré sur $R[p^{-1}]$ relativement à $R_0[p^{-1}]$, on dit que D est *faiblement admissible* s'il est ponctuellement faiblement admissible et s'il se libère après une extension finie étale de R_0 . On a donc l'équivalence « faiblement admissible \Leftrightarrow admissible » dans ce cas. Il est naturel de se demander si cette définition donne encore lieu à une équivalence en rang supérieur à 1, ce que j'ignore. On est confronté à deux problèmes :

- (1) Est-il vrai en général que $D_{\text{cris}}(V)$ se libère après une extension finie étale de R_0 comme c'est le cas lorsque $\dim_{\mathbf{Q}_p}(V) = 1$ (cf. proposition 8.6.1). Un indice est fourni par la proposition 4.2.8, qui implique que $D_{\text{cris}}(V)$ se libère après une extension finie étale de $R_0[p^{-1}]$.
- (2) A-t'on faiblement « admissible \Rightarrow admissible » ? Il semble que non (Tsuji).

CHAPITRE 9

APPENDICES

9.1. Rappels et compléments sur les revêtements presque étales

On garde les notations de la section 2. Soit S une \tilde{R} -algèbre finie et normale telle que $\tilde{R}[p^{-1}] \subset S[p^{-1}]$ est étale. Pour $n \in \mathbf{N}$, on note S_n le normalisé de $S \otimes_{\tilde{R}} \tilde{R}_n$ et M_n (resp. L_n) l'anneau total des fractions de S_n (resp. de \tilde{R}_n).

On dispose de la trace $\mathrm{Tr}_{M_n/L_n} : M_n \rightarrow L_n$. Comme \tilde{R}_n est normal et S_n entier sur \tilde{R}_n , l'application Tr_{M_n/L_n} envoie S_n dans \tilde{R}_n . Comme $\tilde{R}[p^{-1}] \subseteq S[p^{-1}]$ est étale, il existe un unique idempotent $\mathbf{e}_{S, \tilde{R}, n} = \mathbf{e}_n \in (S_n \otimes_{\tilde{R}_n} S_n)[p^{-1}]$ caractérisé par $m_n(x) = (\mathrm{Tr}_{M_n/L_n} \otimes \mathrm{Id})(\mathbf{e}_n \cdot x)$ pour tout $x \in (S_n \otimes_{\tilde{R}_n} S_n)[p^{-1}]$, où $m_n : M_n \otimes_{L_n} M_n \rightarrow M_n$ est la multiplication.

Dans [1], le théorème de pureté de Faltings ([20, Theorem 3.1], [22, Theorem 4]) est raffiné dans l'esprit de Tate ([46, Proposition 5]) :

Théorème 9.1.1. — (Refined almost étalness, [1, Theorem 5.1]). *Il existe un entier ℓ (qui ne dépend que de S) tel que $p^{\ell p^{-n}} \mathbf{e}_n \in S_n \otimes_{\tilde{R}_n} S_n$.*

Corollaire 9.1.2. — *Soient $S \subseteq S'$ deux \tilde{R} -algèbres finies normales telles que $\tilde{R}[p^{-1}] \subseteq S[p^{-1}] \subseteq S'[p^{-1}]$ soient étales. Avec les notations qui précèdent, il existe un entier δ (qui ne dépend que de S et S') tel que $S_n / \mathrm{Tr}_{M'_n/M_n}(S'_n)$ est tué par $p^{\delta p^{-n}}$.*

Démonstration. — Soit S'' le normalisé de S' dans une clôture galoisienne de $S'[p^{-1}]$. Comme (avec des notations évidentes), on a $\mathrm{Tr}_{M''_n/M_n}(S''_n) \subseteq \mathrm{Tr}_{M'_n/M_n}(S'_n)$ on a une surjection $S_n / \mathrm{Tr}_{M''_n/M_n}(S''_n) \twoheadrightarrow S_n / \mathrm{Tr}_{M'_n/M_n}(S'_n)$ et quitte à remplacer S' par S'' , on peut supposer que $S'[p^{-1}]/\tilde{R}[p^{-1}]$ est galoisienne.

D'après le théorème 9.1.1, on a $p^{\ell p^{-n}} \mathbf{e}_{S'/\tilde{R}, n} \in S'_n \otimes_{\tilde{R}_n} S'_n$ où ℓ est un entier indépendant de n . Par ailleurs, l'idempotent $\mathbf{e}_n = \mathbf{e}_{S'/S, n} \in (S'_n \otimes_{S_n} S'_n)[p^{-1}]$ est l'image de $\mathbf{e}_{S'/\tilde{R}, n}$ par l'homomorphisme surjectif $(S'_n \otimes_{\tilde{R}_n} S'_n)[p^{-1}] \rightarrow (S'_n \otimes_{S_n} S'_n)[p^{-1}]$. En effet, ces idempotents correspondent au facteur associé à l'identité de $\mathrm{Gal}(S'_n[p^{-1}]/S_n[p^{-1}])$ et de $\mathrm{Gal}(S'_n[p^{-1}]/\tilde{R}_n[p^{-1}])$ respectivement et l'homomorphisme n'est autre que la projection associée à l'inclusion $\mathrm{Gal}(S'_n[p^{-1}]/S_n[p^{-1}]) \subseteq \mathrm{Gal}(S'_n[p^{-1}]/\tilde{R}_n[p^{-1}])$. On a donc aussi $p^{\ell p^{-n}} \mathbf{e}_n \in S'_n \otimes_{S_n} S'_n$.

Écrivons $p^{\ell p^{-n}} \mathbf{e}_n = \sum_{i=1}^r \lambda_i \otimes \mu_i$ avec $\lambda_i, \mu_i \in S'_n$. On a alors $p^{\ell p^{-n}} = m_n(p^{\ell p^{-n}} \otimes 1) = \sum_{i=1}^r \mathrm{Tr}_{M'_n/M_n}(\lambda_i) \mu_i$. En

prenant la norme de cette égalité on voit que $p^{\ell p^{-n} [M'_n : M_n]}$ est la somme des $\prod_{i=1}^r \prod_{g \in G_i} g(\mathrm{Tr}_{M'_n/M_n}(\lambda_i) \mu_i)$, in-

dexée par les partitions $G_1 \amalg \dots \amalg G_r = \mathrm{Gal}(S'_n[p^{-1}]/S_n[p^{-1}])$. En regroupant les termes pour lesquels on a $\mathrm{Card}(G_i) = n_i$ avec $\underline{n} = (n_1, \dots, n_r) \in \mathbf{N}^r$ fixé, $p^{\ell p^{-n} [M'_n : M_n]}$ peut s'écrire comme une somme d'éléments de la forme $a_{\underline{n}} \prod_{i=1}^r \mathrm{Tr}_{M'_n/M_n}(\lambda_i)^{n_i}$ où $a_{\underline{n}} \in S'_n$ est invariant sous $\mathrm{Gal}(S'_n[p^{-1}]/S_n[p^{-1}])$, donc dans S_n vu que ce dernier est normal. On a donc $p^{\ell p^{-n} [M'_n : M_n]} \in \mathrm{Tr}_{M'_n/M_n}(S'_n)$. La suite $([M'_n : M_n])_{n \in \mathbf{N}}$ étant bornée, il suffit de prendre $\delta = \ell \max_n([M'_n : M_n])$. \square

À partir de maintenant, et jusqu'à la fin de cette section, les notations ne sont pas celles du texte, mais celles de [22]. Commençons par rappeler quelques définitions et propriétés (*cf. loc. cit.* 1 et 2).

Soit \bar{V} un anneau commutatif unitaire muni d'une suite d'idéaux principaux $\{\mathfrak{m}_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda^+}$ où Λ est un sous-groupe de \mathbf{Q} dense dans \mathbb{R} . On note π^α un générateur de \mathfrak{m}_α et on suppose que $\pi^\alpha \pi^\beta \in \pi^{\alpha+\beta} \bar{V}^\times$ et que π^α n'est pas diviseur de zéro pour $\alpha, \beta \in \Lambda^+$. On pose $\mathfrak{m} = \bigcup_{\alpha > 0} \mathfrak{m}_\alpha$.

Définition 9.1.3. — (Faltings) Un \overline{V} -module M est dit *presque nul* s'il est tué par \mathfrak{m} . On note alors $M \approx 0$.

Soient R une \overline{V} -algèbre et M un R -module.

Définition 9.1.4. — (i) Le R -module M est *presque projectif* si $\text{Ext}_R^i(M, N) \approx 0$ pour tout R -module N et tout $i > 0$ ($i = 1$ suffit).

(ii) Le R -module M est *presque plat* si $\text{Tor}_i^R(M, N) \approx 0$ pour tout R -module N et tout $i > 0$ ($i = 1$ suffit).

(iii) Le R -module M est *presque type fini* (resp. *presque de présentation finie*) si pour tout $\alpha \in \Lambda_{>0}$, il existe un R -module de type fini (resp. de présentation finie) N_α et deux applications R -linéaires $\psi_\alpha: N_\alpha \rightarrow M$ et $\phi_\alpha: M \rightarrow N_\alpha$ telles que $\phi_\alpha \circ \psi_\alpha = \pi^\alpha \text{Id}_{N_\alpha}$ et $\psi_\alpha \circ \phi_\alpha = \pi^\alpha \text{Id}_M$.

Proposition 9.1.5. — (i) Un R -module P est *presque projectif* si et seulement si pour tout couple d'applications R -linéaires $f: M \rightarrow N$, $g: P \rightarrow N$ avec f surjective, $\pi^\alpha g$ se factorise par f pour tout $\alpha \in \Lambda_{>0}$. C'est équivalent à dire que pour tout $\alpha \in \Lambda_{>0}$, il existe un R -module libre L_α et des applications R -linéaires $L_\alpha \xrightarrow{g_\alpha} P \xrightarrow{f_\alpha} L_\alpha$ tels que $g_\alpha \circ f_\alpha = \pi^\alpha \text{Id}_P$.

(ii) Si P est *presque projectif* et *presque de type fini*, alors P est *presque de présentation finie*.

Définition 9.1.6. — (cf. [34, 18.3.1]) Un homomorphisme d'anneaux $A \rightarrow B$ est *revêtement presque étale* quand

(i) Le A -module B est *presque projectif de type fini*, de rang fini.

(ii) Le $B \otimes_A B$ est *presque projectif de type fini*.

Soit $A \rightarrow B$ un revêtement presque étale. En remplaçant au besoin A par $\text{Hom}(\mathfrak{m}, A)$, on peut se réduire au cas où le rang de B sur A est constant égal à r . Il existe alors un changement de base presque fidèlement plat $A \rightarrow A'$ (i.e. A' est presque plat sur A et $M \otimes_A A' \approx 0 \Rightarrow M \approx 0$) tel que $B \otimes_A A' \approx A'^r$.

Lemme 9.1.7. — Soit A un anneau, B_1, B_2 deux revêtements presque étales de A . Soit $w: B_1 \rightarrow B_2$ un homomorphisme de A -algèbres. Alors w est un revêtement presque étale.

Démonstration. — • On a le diagramme cocartésien

$$\begin{array}{ccc} B_1 \otimes_A B_1 & \longrightarrow & B_1 \otimes_A B_2 \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ B_1 & \longrightarrow & B_2. \end{array}$$

Comme B_1 est un revêtement presque étale de A , le $B_1 \otimes_A B_1$ -module B_1 est presque projectif de type fini. Le $B_1 \otimes_A B_2$ -module B_2 est donc presque projectif de type fini par changement de base. Comme B_2 est un revêtement presque étale de A , le A -module B_2 est presque projectif de type fini. Le B_1 -module $B_1 \otimes_A B_2$ est donc presque projectif de type fini par changement de base. Il en résulte que le composé $B_1 \rightarrow B_1 \otimes_A B_2 \rightarrow B_2$ est presque projectif de type fini.

• On a le diagramme cocartésien

$$\begin{array}{ccc} B_2 \otimes_A B_2 & \longrightarrow & B_2 \otimes_{B_1} B_2 \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ B_2 & \xlongequal{\quad} & B_2. \end{array}$$

Comme B_2 est un revêtement presque étale de A , le $B_2 \otimes_A B_2$ -module B_2 est presque projectif de type fini. Il en est donc de même du $B_2 \otimes_{B_1} B_2$ -module B_2 . \square

Lemme 9.1.8. — Soit A un anneau, M, N deux A -modules et A' une A -algèbre. On suppose M presque de présentation finie sur A et A' presque plat sur A . Alors l'homomorphisme naturel

$$A' \otimes_A \text{Hom}_A(M, N) \rightarrow \text{Hom}_{A'}(A' \otimes_A M, A' \otimes_A N)$$

est un *presque isomorphisme*.

Démonstration. — Soit $\alpha \in \Lambda$. Il existe un A -module M_α de présentation finie, des homomorphismes $u_\alpha: M \rightarrow M_\alpha$ et $v_\alpha: M_\alpha \rightarrow M$ tels que le composé $M \xrightarrow{u_\alpha} M_\alpha \xrightarrow{v_\alpha} M$ soit la multiplication par π^α . Soit $A^{r\alpha} \rightarrow A^{s\alpha} \rightarrow M_\alpha \rightarrow 0$ une présentation de M_α . On en déduit la suite exacte $0 \rightarrow \text{Hom}_A(M_\alpha, N) \rightarrow \text{Hom}_A(A^{s\alpha}, N) \rightarrow \text{Hom}_A(A^{r\alpha}, N)$ et donc la suite exacte (≈ 0) $\rightarrow A' \otimes_A \text{Hom}_A(M_\alpha, N) \rightarrow A' \otimes_A \text{Hom}_A(A^{s\alpha}, N) \rightarrow A' \otimes_A \text{Hom}_A(A^{r\alpha}, N)$ par presque platitude de A' sur A (où (≈ 0) désigne un A -module presque nul). Par ailleurs, on en déduit la suite exacte $(A')^{r\alpha} \rightarrow (A')^{s\alpha} \rightarrow A' \otimes_A M_\alpha \rightarrow 0$ et donc la suite exacte

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{A'}(A' \otimes_A M_\alpha, A' \otimes_A N) \rightarrow \text{Hom}_{A'}((A')^{s\alpha}, A' \otimes_A N) \rightarrow \text{Hom}_{A'}((A')^{r\alpha}, A' \otimes_A N).$$

On a donc un diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccc}
(\approx 0) & \longrightarrow & A' \otimes_A \text{Hom}_A(M_\alpha, N) & \longrightarrow & A' \otimes_A \text{Hom}_A(A^{s_\alpha}, N) & \longrightarrow & A' \otimes_A \text{Hom}_A(A^{r_\alpha}, N) \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & \text{Hom}_{A'}(A' \otimes_A M_\alpha, A' \otimes_A N) & \longrightarrow & \text{Hom}_{A'}((A')^{s_\alpha}, A' \otimes_A N) & \longrightarrow & \text{Hom}_{A'}((A')^{r_\alpha}, A' \otimes_A N).
\end{array}$$

Les deux flèches verticales de droite sont des isomorphismes. Il en résulte (chasse au diagramme) que l'homomorphisme $A' \otimes_A \text{Hom}_A(M_\alpha, N) \rightarrow \text{Hom}_{A'}(A' \otimes_A M_\alpha, A' \otimes_A N)$ est un presque isomorphisme. On a de plus le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
A' \otimes_A \text{Hom}_A(M, N) & \longrightarrow & \text{Hom}_{A'}(A' \otimes_A M, A' \otimes_A N) \\
\downarrow & & \downarrow \\
A' \otimes_A \text{Hom}_A(M_\alpha, N) & \xrightarrow{\approx} & \text{Hom}_{A'}(A' \otimes_A M_\alpha, A' \otimes_A N) \\
\downarrow & & \downarrow \\
A' \otimes_A \text{Hom}_A(M, N) & \longrightarrow & \text{Hom}_{A'}(A' \otimes_A M, A' \otimes_A N)
\end{array}
\begin{array}{c} \\ \\ \pi^\alpha \\ \\ \end{array}$$

Si $x \in A' \otimes_A \text{Hom}_A(M, N)$ est d'image nulle dans $\text{Hom}_{A'}(A' \otimes_A M, A' \otimes_A N)$, alors $\text{Id}_{A'} \otimes v_\alpha^*(x)$ a une image nulle dans $\text{Hom}_{A'}(A' \otimes_A M_\alpha, A' \otimes_A N)$. Il est donc presque nul d'où $\pi^\alpha(\text{Id}_{A'} \otimes v_\alpha^*)(x) = 0$. En appliquant $\text{Id}_{A'} \otimes u_\alpha^*$, on a donc $\pi^{2\alpha}x = 0$.

Si $y \in \text{Hom}_{A'}(A' \otimes_A M, A' \otimes_A N)$, alors il existe $x \in A' \otimes_A \text{Hom}_A(M_\alpha, N)$ dont l'image dans $\text{Hom}_{A'}(A' \otimes_A M_\alpha, A' \otimes_A N)$ est $\pi^\alpha(\text{Id}_{A'} \otimes v_\alpha^*)(x)$. L'élément $(\text{Id}_{A'} \otimes u_\alpha^*)(x)$ de $A' \otimes_A \text{Hom}_A(M, N)$ a donc $\pi^{2\alpha}y$ pour image.

Le noyau et le conoyau de $A' \otimes_A \text{Hom}_A(M_\alpha, N) \rightarrow \text{Hom}_{A'}(A' \otimes_A M_\alpha, A' \otimes_A N)$ sont tués par $\pi^{2\alpha}$ pour tout α , ils sont donc presque nuls, ce qu'on voulait. \square

Lemme 9.1.9. — Soit $A \rightarrow B_1$ et $B_1 \xrightarrow{w} B_2$ deux revêtements presque étales. Alors l'application B_2 -linéaire (pour la multiplication à droite) $B_1 \otimes_A B_2 \rightarrow B_2 \otimes_A B_2$ est presque facteur direct.

Démonstration. — Soit I_{B_2/B_1} le noyau de la multiplication $B_2 \otimes_{B_1} B_2 \rightarrow B_2$. Comme B_2 est presque projectif sur B_1 , il en est de même de $B_2 \otimes_{B_1} B_2$ sur B_2 . Comme le B_2 -module I_{B_2/B_1} est facteur direct de $B_2 \otimes_{B_1} B_2$, il est aussi presque projectif sur B_2 . Soit $I_{B_1/A}$ le noyau de la multiplication $B_1 \otimes_A B_1 \rightarrow B_1$. La suite exacte $0 \rightarrow I_{B_1/A} \rightarrow B_1 \otimes_A B_1 \rightarrow B_1 \rightarrow 0$ étant scindée, la suite $0 \rightarrow I_{B_1/A} \otimes_{B_1} B_2 \rightarrow B_1 \otimes_A B_2 \xrightarrow{m} B_2 \rightarrow 0$ est exacte et scindée. Par ailleurs, le noyau de l'homomorphisme $B_2 \otimes_A B_2 \rightarrow B_2 \otimes_{B_1} B_2$ est le B_2 module engendré par les éléments de la forme $w(b) \otimes 1 - 1 \otimes w(b)$, i.e. par l'image de $I_{B_1/A} \otimes_{B_1} B_2$ par $w \otimes \text{Id}_{B_2} : B_1 \otimes_A B_2 \rightarrow B_2 \otimes_A B_2$. On a donc la suite exacte $I_{B_1/A} \otimes_{B_1} B_2 \rightarrow B_2 \otimes_A B_2 \rightarrow B_2 \otimes_{B_1} B_2 \rightarrow 0$. On a alors le diagramme à lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & I_{B_1/A} \otimes_{B_1} B_2 & \longrightarrow & B_1 \otimes_A B_2 & \xrightarrow{m} & B_2 \longrightarrow 0 \\
& & \parallel & & \downarrow w \otimes \text{Id}_{B_2} & & \downarrow i_2 \\
(\approx 0) & \longrightarrow & I_{B_1/A} \otimes_{B_1} B_2 & \longrightarrow & B_2 \otimes_A B_2 & \longrightarrow & B_2 \otimes_{B_1} B_2 \longrightarrow 0 \\
& & & & & & \uparrow \\
& & & & & & I_{B_2/B_1}
\end{array}$$

où $i_2(b) = 1 \otimes b$. La presque injectivité dans la ligne du bas résulte de la presque injectivité de $w \otimes \text{Id}_{B_2}$ (car presque fidèlement plat puisque déduit par changement de base de w qui est un revêtement presque étale). La flèche en pointillé n'est pas définie, mais signifie que le sous- B_2 -module I_{B_2/B_1} de $B_2 \otimes_{B_1} B_2$ est presque facteur direct de $B_2 \otimes_A B_2$ (car I_{B_2/B_1} est presque projectif sur B_2). On a donc $B_2 \otimes_{B_1} B_2 \approx B_2 \oplus I_{B_2/B_1}$ et donc $B_2 \otimes_A B_2 \approx (B_1 \otimes_A B_2) \oplus I_{B_2/B_1}$, ce qu'on voulait. \square

9.2. I-platitude

Dans toute cette partie, Λ désigne un anneau, B une Λ -algèbre et $I \subseteq B$ un idéal.

Définition 9.2.1. — (Fontaine) L'anneau B est dit *I-plat* sur Λ (ou bien la Λ -algèbre B est plate relativement à l'idéal I) si pour toute injection de Λ -modules $u : M' \rightarrow M$, le B -module $\text{Ker}(1 \otimes u : B \otimes_\Lambda M' \rightarrow B \otimes_\Lambda M)$ est tué par I .

Remarque 9.2.2. — Cette notion généralise celle de presque platitude de Faltings, qui correspond grosso-modo au cas $I = B \cdot J$ avec J idéal de Λ tel que $J^2 = J$.

Proposition 9.2.3. — (i) Dans la définition de la I-platitude, on peut se restreindre aux Λ -modules M' qui sont de type fini.

(ii) Si $S \subseteq B$ est une partie multiplicative, et si B est plate relativement à l'idéal I , alors $S^{-1}B$ est $S^{-1}I$ -plate.

(iii) La Λ -algèbre B est I -plate si et seulement si pour tout Λ -module M , le B -module $\text{Tor}_1^\Lambda(B, M)$ est tué par I .

Démonstration. — Les deux premiers points sont évidents, démontrons le troisième. Supposons que la Λ -algèbre B est I -plate, et soit M un Λ -module. Si $0 \rightarrow K \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow 0$ est une suite exacte de Λ -modules avec L libre, on a la suite exacte $0 = \text{Tor}_1^\Lambda(B, L) \rightarrow \text{Tor}_1^\Lambda(B, M) \rightarrow B \otimes_\Lambda K \rightarrow B \otimes_\Lambda L$. Par définition de la I -platitude, le B -module $\text{Tor}_1^\Lambda(B, M) = \text{Ker}(B \otimes_\Lambda K \rightarrow B \otimes_\Lambda L)$ est tué par I . La réciproque est évidente. \square

Proposition 9.2.4. — Soit J un idéal de B et X un B -module de type fini, $\widehat{B} = \varprojlim_n B/J^n$ et $\widehat{X} = \varprojlim_n X/J^n X$.

L'homomorphisme naturel $\widehat{B} \otimes_B X \rightarrow \widehat{X}$ est surjectif.

Démonstration. — Comme X est de type fini, il existe un Λ -module libre de rang fini L et un homomorphisme surjectif $f: L \rightarrow X$. D'après [42, Theorem 8.1], l'homomorphisme induit entre les complétés pour la topologie J -adique $\widehat{f}: \varprojlim_n L/J^n L \rightarrow \varprojlim_n X/J^n X$ est surjectif. Par ailleurs, comme L est libre de rang fini, l'homomorphisme naturel $\widehat{B} \otimes_B L \rightarrow \widehat{L}$ est un isomorphisme. La proposition résulte donc de la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} \widehat{B} \otimes_B L & \xrightarrow{\sim} & \widehat{L} \\ \downarrow & & \downarrow \widehat{f} \\ \widehat{B} \otimes_B X & \longrightarrow & \widehat{X}. \end{array}$$

\square

Corollaire 9.2.5. — Soit I_0 un idéal de Λ et M un Λ -module de type fini. Posons $J = I_0 B$ de sorte que $\widehat{B} = \varprojlim_n B/I_0^n B$. Alors l'homomorphisme naturel $\widehat{B} \otimes_\Lambda M \rightarrow \varprojlim_n B \otimes_\Lambda (M/I_0^n M)$ est surjectif.

Démonstration. — On applique la proposition qui précède au B -module $B \otimes_\Lambda M$. \square

Proposition 9.2.6. — Supposons l'anneau Λ noethérien, séparé et complet pour la topologie p -adique, et que p n'est pas diviseur de zéro dans Λ . Supposons de plus que la Λ -algèbre B est I -plate. Notons $\widehat{B} = \varprojlim_n B/p^n B$.

Soit M un Λ -module de type fini sans p -torsion. Alors l'homomorphisme naturel $\widehat{B} \otimes_\Lambda M \rightarrow \varprojlim_n B \otimes_\Lambda (M/p^n M)$ est surjectif, de noyau tué par I .

Démonstration. — La surjectivité résulte du corollaire qui précède appliqué à l'idéal $I_0 = p\Lambda$ et au Λ -module de type fini M .

Comme M est de type fini et Λ est noethérien, il existe une suite exacte $0 \rightarrow K \xrightarrow{u} L \xrightarrow{v} M \rightarrow 0$ avec L libre de type fini et K de type fini. Comme M est sans p torsion, pour tout $n \in \mathbf{N}_{>0}$, cette suite induit la suite exacte $0 \rightarrow K/p^n K \rightarrow L/p^n L \rightarrow M/p^n M \rightarrow 0$. Pour $n \in \mathbf{N}_{>0}$ on a donc une suite exacte

$$0 \rightarrow X_n \rightarrow B \otimes_\Lambda (K/p^n K) \rightarrow B \otimes_\Lambda (L/p^n L) \rightarrow B \otimes_\Lambda (M/p^n M) \rightarrow 0$$

dans laquelle, comme B est I -plat sur Λ , le B -module X_n est tué par I . On en déduit le diagramme commutatif suivant, dont la première ligne est exacte

$$\begin{array}{ccccccc} \widehat{B} \otimes_\Lambda K & \xrightarrow{1 \otimes u} & \widehat{B} \otimes_\Lambda L & \xrightarrow{1 \otimes v} & \widehat{B} \otimes_\Lambda M & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow q_1 & & \downarrow q_2 & & \downarrow q_3 & & \\ \varprojlim_n X_n & \longrightarrow & \varprojlim_n B \otimes_\Lambda (K/p^n K) & \longrightarrow & \varprojlim_n B \otimes_\Lambda (L/p^n L) & \longrightarrow & \varprojlim_n B \otimes_\Lambda (M/p^n M) \longrightarrow 0 \end{array}$$

(remarque : j'ignore si la ligne du bas est exacte en $\varprojlim_n B \otimes_\Lambda (L/p^n L)$). Les homomorphismes verticaux sont surjectifs en vertu du corollaire qui précède, et celui du milieu est un isomorphisme car L est libre.

Soit maintenant $x \in \text{Ker}(q_3: \widehat{B} \otimes_\Lambda M \rightarrow \varprojlim_n B \otimes_\Lambda (M/p^n M))$. Montrons que x est tué par I .

Comme $1 \otimes v: \widehat{B} \otimes_\Lambda L \rightarrow \widehat{B} \otimes_\Lambda M$ est surjectif, il existe $y \in \widehat{B} \otimes_\Lambda L$ tel que $x = (1 \otimes v)(y)$. Notons $(y_n)_{n \in \mathbf{N}_{>0}} = q_2(y) \in \varprojlim_n B \otimes_\Lambda (L/p^n L)$. Comme $q_3(x) = 0$, on a $(1 \otimes v)(y_n) = 0$ dans $B \otimes_\Lambda (M/p^n M)$ pour tout $n \in \mathbf{N}_{>0}$. Il existe donc $z_n \in B \otimes_\Lambda (K/p^n K)$ tel que $y_n = (1 \otimes u)(z_n)$. Si $q_{1,n}: B \otimes_\Lambda (K/p^{n+1} K) \rightarrow B \otimes_\Lambda (K/p^n K)$ et $q_{2,n}: B \otimes_\Lambda (L/p^{n+1} L) \rightarrow B \otimes_\Lambda (L/p^n L)$ désignent les homomorphismes de transition, on a $(1 \otimes u)(z_n - q_{1,n}(z_{n+1})) = y_n - q_{2,n}((1 \otimes u)(z_{n+1})) = y_n - q_{2,n}(y_{n+1})$ or $y_n - q_{2,n}(y_{n+1}) = 0$ pour tout $n > 0$ vu que $(y_n)_{n \in \mathbf{N}_{>0}} \in \varprojlim_n B \otimes_\Lambda (L/p^n L)$. On a donc $z_n - q_{1,n}(z_{n+1}) \in \text{Ker}(1 \otimes u) = X_n$. Soit $\alpha \in I$. Comme X_n est tué

par I , on a $\alpha(z_n - q_{1,n}(z_{n+1})) = 0$. Ainsi la suite $(\alpha z_n)_{n \in \mathbf{N}_{>0}}$ définit un élément de $\varprojlim_n B \otimes_\Lambda (K/p^n K)$. Comme l'homomorphisme q_1 est surjectif, il existe $z_\alpha \in \widehat{B} \otimes_\Lambda K$ tel que $q_1(z_\alpha) = (\alpha z_n)_{n \in \mathbf{N}_{>0}}$. Or on a $((1 \otimes u) \circ q_1)(z_\alpha) = (\alpha y_n)_{n \in \mathbf{N}_{>0}}$ donc $(q_2 \circ (1 \otimes u))(z_\alpha) = q_2(\alpha y)$. Comme q_2 est un isomorphisme, on a $\alpha y = (1 \otimes u)(z_\alpha)$ et donc $\alpha x = (1 \otimes v)(\alpha y) = 0$. Comme c'est vrai pour tout $\alpha \in I$ et tout $x \in \text{Ker}(q_3)$, le noyau de q_3 est tué par I , ce qu'on voulait. \square

Théorème 9.2.7. — *Supposons l'anneau Λ noethérien, séparé et complet pour la topologie p -adique, et que p n'est pas diviseur de zéro. Supposons de plus que la Λ -algèbre B est I -plate et sans p -torsion. Notons $\widehat{B} = \varprojlim_n B/p^n B$. Alors \widehat{B} est $I^3 \widehat{B}$ -plat sur Λ .*

Démonstration. — Étape 1 : Soit M un Λ -module de type fini sans p -torsion. Montrons que $\text{Tor}_1^\Lambda(\widehat{B}, M)$ est tué par I^2 .

Soit $0 \rightarrow K \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow 0$ une suite exacte de Λ -modules avec L libre de rang fini. On a le diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Tor}_1^\Lambda(\widehat{B}, M) & \longrightarrow & \widehat{B} \otimes_\Lambda K & \xrightarrow{f} & \widehat{B} \otimes_\Lambda L \\ & & & & \downarrow q_1 & & \downarrow q_2 \\ 0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & \varprojlim_n B \otimes_\Lambda (K/p^n K) & \xrightarrow{g} & \varprojlim_n B \otimes_\Lambda (L/p^n L) \end{array}$$

avec $X = \varprojlim_n X_n$ où $X_n = \text{Ker}(B \otimes_\Lambda (K/p^n K) \rightarrow B \otimes_\Lambda (L/p^n L))$. Comme B est I -plat sur Λ , X_n est tué par I pour tout $n \in \mathbf{N}_{>0}$ et donc le B -module X est tué par I . Soit $x \in \text{Tor}_1^\Lambda(\widehat{B}, M)$. On a $(q_2 \circ f)(x) = 0$ donc $(g \circ q_1)(x) = 0$ et donc $q_1(x) \in X$. Comme X est tué par I , si $\alpha \in I$, on a $\alpha q_1(x) = 0$ et donc $\alpha x \in \text{Ker}(q_1)$. Comme K s'identifie à un sous Λ -module de L qui est libre donc sans p -torsion, le Λ -module K est sans p -torsion. D'après la proposition qui précède (K est de type fini car Λ est noethérien et L de rang fini), $\text{Ker}(q_1 : \widehat{B} \otimes_\Lambda K \rightarrow \varprojlim_n B \otimes_\Lambda (K/p^n K))$ est tué par I . On a donc $\alpha I x = 0$. Comme c'est vrai pour tout $\alpha \in I$ et tout $x \in \text{Tor}_1^\Lambda(\widehat{B}, M)$, le B -module $\text{Tor}_1^\Lambda(\widehat{B}, M)$ est tué par I^2 .

Étape 2 : Soit M un Λ -module de type fini et de p -torsion. Montrons que $\text{Tor}_1^\Lambda(\widehat{B}, M)$ est tué par I . Il existe des entiers $r, n \in \mathbf{N}_{>0}$ et une suite exacte

$$0 \rightarrow K \xrightarrow{u} (\Lambda/p^n \Lambda)^r \rightarrow M \rightarrow 0$$

et donc une suite exacte

$$\text{Tor}_1^\Lambda(\widehat{B}, \Lambda/p^n \Lambda)^r \rightarrow \text{Tor}_1^\Lambda(\widehat{B}, M) \rightarrow \widehat{B} \otimes_\Lambda K \xrightarrow{\text{Id}_{\widehat{B}} \otimes u} \widehat{B} \otimes_\Lambda (\Lambda/p^n \Lambda)^r.$$

Comme Λ est sans p -torsion, on a la suite exacte

$$0 \rightarrow \Lambda \xrightarrow{p^n} \Lambda \rightarrow \Lambda/p^n \Lambda \rightarrow 0$$

et donc $\text{Tor}_1^\Lambda(\widehat{B}, \Lambda/p^n \Lambda) = \text{Ker}(p^n : \widehat{B} \rightarrow \widehat{B}) = 0$ (comme B est supposé sans p -torsion, il en est de même de \widehat{B}). On a donc $\text{Tor}_1^\Lambda(\widehat{B}, M) = \text{Ker}(\text{Id}_{\widehat{B}} \otimes u)$.

Comme K et $\Lambda/p^n \Lambda$ sont tués par p^n , les homomorphismes naturels $B \otimes_\Lambda K \rightarrow \widehat{B} \otimes_\Lambda K$ et $B \otimes_\Lambda (\Lambda/p^n \Lambda)^r \rightarrow \widehat{B} \otimes_\Lambda (\Lambda/p^n \Lambda)^r$ sont des isomorphismes. L'application $\text{Id}_{\widehat{B}} \otimes u$ s'identifie alors à $\text{Id}_B \otimes u$. Comme le noyau de ce dernier est tué par I par I -platitude de B sur Λ , il en est de même de $\text{Tor}_1^\Lambda(\widehat{B}, M)$.

Étape 3 : Soit M un Λ -module de type fini. Montrons que le B -module $\text{Tor}_1^\Lambda(\widehat{B}, M)$ est tué par I^3 .

Notons M_p la partie de p -torsion de M et ${}_p M = M/M_p$. On a la suite exacte

$$0 \rightarrow M_p \rightarrow M \rightarrow {}_p M \rightarrow 0$$

et donc la suite exacte

$$\text{Tor}_1^\Lambda(\widehat{B}, M_p) \rightarrow \text{Tor}_1^\Lambda(\widehat{B}, M) \rightarrow \text{Tor}_1^\Lambda(\widehat{B}, {}_p M).$$

Comme M_p est de type fini (Λ est noethérien) et de p -torsion, le B -module $\text{Tor}_1^\Lambda(\widehat{B}, M_p)$ est tué par I d'après l'étape 2.

Le Λ -module ${}_p M$ est sans p -torsion (en effet, si $x \in M$ est tel que $p^r x \in M_p$, alors il existe $s \in \mathbf{N}$ tel que $p^s(p^r x) = 0$ et donc $x \in M_p$). D'après l'étape 1, le B -module $\text{Tor}_1^\Lambda(\widehat{B}, {}_p M)$ est tué par I^2 . Le B -module $\text{Tor}_1^\Lambda(\widehat{B}, M)$ est donc tué par I^3 . \square

Corollaire 9.2.8. — Supposons l'anneau Λ noethérien, séparé et complet pour la topologie p -adique, et que p n'est pas diviseur de zéro. Soit B une Λ -algèbre p -plate sans p -torsion et $\widehat{B} = \varprojlim_n B/p^n B$. Alors $\widehat{B}[p^{-1}]$ est plat sur $\Lambda[p^{-1}]$.

Démonstration. — D'après la proposition qui précède, la Λ -algèbre \widehat{B} est p^3 -plate. Si M est un $\Lambda[p^{-1}]$ -module, le B -module $\mathrm{Tor}_1^\Lambda(\widehat{B}, M)$ est tué par p^3 . On a $\mathrm{Tor}_1^{\Lambda[p^{-1}]}(\widehat{B}[p^{-1}], M[p^{-1}]) = \mathrm{Tor}_1^\Lambda(\widehat{B}, M)[p^{-1}] = 0$ (la localisation commute au foncteur Tor). Comme M est $\Lambda[p^{-1}]$ -module, on a $M = M[p^{-1}]$ et donc $\mathrm{Tor}_1^{\Lambda[p^{-1}]}(\widehat{B}[p^{-1}], M) = 0$. Comme c'est vrai pour tout $\Lambda[p^{-1}]$ -module M , la $\Lambda[p^{-1}]$ -algèbre $\widehat{B}[p^{-1}]$ est plate. \square

9.3. Calculs de cohomologie cristalline

Dans tout ce qui suit, les anneaux sont tous des $\mathbf{Z}_{(p)}$ -algèbres, et toutes les puissances divisées (et les enveloppes à puissances divisées) considérées seront compatibles aux puissances divisées canoniques sur l'idéal engendré par p .

Notation. Soit n un entier. Pour tout schéma X , on note X_n sa réduction modulo p^n . Si $X \rightarrow Y$ est un morphisme de schémas, on pose (cf. [25, II 1.2])

$$\mathcal{O}_n^{\mathrm{cris}}(X|Y) = \mathrm{H}^0((X_n|Y_n)_{\mathrm{cris}}, \text{faisceau structural})$$

où l'idéal à puissances divisées considéré sur Y_n est l'idéal engendré par p . Si Λ_0 un anneau commutatif et Λ une Λ_0 -algèbre, on dénote par $\mathcal{O}_n^{\mathrm{cris}}(\Lambda|\Lambda_0)$ la $\Lambda_0/p^n \Lambda_0$ -algèbre $\mathcal{O}_n^{\mathrm{cris}}(\mathrm{Spec}(\Lambda)|\mathrm{Spec}(\Lambda_0))$.

Soit \mathcal{I} la catégorie (filtrante) des $\Lambda_0/p^n \Lambda_0$ -algèbres qui sont des épaisissements à puissances divisées de $\Lambda/p^n \Lambda$. On a alors $\mathcal{O}_n^{\mathrm{cris}}(\Lambda|\Lambda_0) = \varprojlim_{D \in \mathcal{I}} D$. Si $D \in \mathcal{I}$, notons I_D l'idéal à puissances divisées $\mathrm{Ker}(D \rightarrow \Lambda/p^n \Lambda)$.

On note alors $\mathcal{I}_n^{[1]}(\Lambda|\Lambda_0)$ l'idéal à puissances divisées $\varprojlim_{D \in \mathcal{I}} I_D$. On dispose donc sur $\mathcal{O}_n^{\mathrm{cris}}(\Lambda|\Lambda_0)$ d'une filtration,

donnée par $\mathrm{Fil}^r \mathcal{O}_n^{\mathrm{cris}}(\Lambda|\Lambda_0) = \mathcal{I}_n^{[r]}(\Lambda|\Lambda_0)$ (r -ième puissance divisée de l'idéal $\mathcal{I}_n^{[1]}(\Lambda|\Lambda_0)$). Rappelons qu'on a un isomorphisme $\mathcal{O}_n^{\mathrm{cris}}(\Lambda|\Lambda_0) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_n^{\mathrm{cris}}(\Lambda/p\Lambda|\Lambda_0)$ ([6, IV Théorème 1.4.1]), non compatible en général aux filtrations. Enfin, si $\Lambda_0/p^n \Lambda_0$ est muni d'un Frobenius (endomorphisme relevant le Frobenius de $\Lambda_0/p\Lambda_0$), il en est de même de $\mathcal{O}_n^{\mathrm{cris}}(\Lambda|\Lambda_0)$ par functorialité.

Soient Λ_0 une W -algèbre et Λ une Λ_0 -algèbre. Si on munit $W_n(\Lambda/p\Lambda)$ de la structure de W_n -algèbre définie par $W_n \xrightarrow{\sigma^{-n}} W_n \xrightarrow{\mathrm{can}} W_n(\Lambda/p\Lambda)$, on a un homomorphisme de W_n -algèbres

$$\begin{aligned} \theta_n : W_n(\Lambda/p\Lambda) &\longrightarrow \Lambda/p^n \Lambda \\ (a_0, \dots, a_{n-1}) &\longmapsto \sum_{i=0}^{n-1} p^i \widehat{a}_i^{p^{n-i}} \end{aligned}$$

où \widehat{a}_i désigne un relèvement de a_i dans $\Lambda/p^n \Lambda$. En effet, comme c'est la n -ième composante fantôme de $(\widehat{a}_0, \dots, \widehat{a}_{n-1}) \in W_n(\Lambda/p^n \Lambda)$, il suffit de voir qu'elle ne dépend pas des choix des relèvements. Cela résulte du fait qu'un autre relèvement de a_i est de la forme $\widehat{a}_i + pb_i$ et donc $p^i(\widehat{a}_i + pb_i)^{p^{n-i}} = p^i \widehat{a}_i^{p^{n-i}} + \sum_{j=1}^{p^{n-i}} \binom{p^{n-i}}{j} p^{i+j} b_i^j \widehat{a}_i^{p^{n-i}-j} = p^j \widehat{a}_i^{p^{n-i}}$ dans $\Lambda/p^n \Lambda$ vu que si $j > 0$, on a $v\left(\binom{p^{n-i}}{j} p^{i+j}\right) = n - i - v(j) + i + j \geq n$.

On note θ_{n, Λ_0} l'homomorphisme de $\Lambda_0/p^n \Lambda_0$ -algèbres déduit de θ_n par extension des scalaires de W à $\Lambda_0/p^n \Lambda_0$, et $((\Lambda_0/p^n \Lambda_0) \otimes_{W_n} W_n(\Lambda/p\Lambda))^{\mathrm{DP}}$ l'enveloppe à puissances divisées de $(\Lambda_0/p^n \Lambda_0) \otimes_{W_n} W_n(\Lambda/p\Lambda)$ relativement à l'idéal $\mathrm{Ker}(\theta_{n, \Lambda_0})$ (compatible aux puissances divisées de W_n pour pW_n). Si $\Lambda_0 = W$, on la note simplement $W_n^{\mathrm{DP}}(\Lambda/p\Lambda)$.

Remarque 9.3.1. — Soit $\bar{\theta}_{n, \Lambda_0}$ la réduction de θ_{n, Λ_0} modulo p , et $\bar{\theta}_n$ celle de θ_n :

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_n : W_n(\Lambda/p\Lambda) &\longrightarrow \Lambda/p\Lambda \\ (a_0, \dots, a_{n-1}) &\longmapsto a_0^{p^n}. \end{aligned}$$

Si le Frobenius de $\Lambda/p\Lambda$ est surjectif, l'homomorphisme θ_n est surjectif. Il en est donc de même de θ_{n, Λ_0} . On a donc $\mathrm{Ker}(\bar{\theta}_{n, \Lambda_0}) = \mathrm{Ker}(\theta_{n, \Lambda_0}) + p((\Lambda_0/p^n \Lambda_0) \otimes_{W_n} W_n(\Lambda/p\Lambda))$, et l'enveloppe à puissances divisées de $(\Lambda_0/p^n \Lambda_0) \otimes_{W_n} W_n(\Lambda/p\Lambda)$ relativement à l'idéal $\mathrm{Ker}(\theta_{n, \Lambda_0})$ s'identifie à l'enveloppe à puissances divisées de $(\Lambda_0/p^n \Lambda_0) \otimes_{W_n} W_n(\Lambda/p\Lambda)$ relativement à l'idéal $\mathrm{Ker}(\bar{\theta}_{n, \Lambda_0})$.

L'anneau $((\Lambda_0/p^n\Lambda_0) \otimes_{W_n} W_n(\Lambda/p\Lambda))^{\text{DP}}$ est une $\Lambda_0/p^n\Lambda_0$ -algèbre. Toujours si le Frobenius est surjectif sur $\Lambda/p\Lambda$, l'homomorphisme θ_{n,Λ_0} induit un épaississement à puissances divisées $((\Lambda_0/p^n\Lambda_0) \otimes_{W_n} W_n(\Lambda/p\Lambda))^{\text{DP}} \rightarrow \Lambda/p^n\Lambda$. On note encore θ_{n,Λ_0} l'homomorphisme d'anneaux sous-jacent. Avec les notations qui précèdent, on a $\mathcal{O}_n^{\text{cris}}(\Lambda|W) = \varprojlim_{D \in \mathcal{I}} D$. Il existe donc un unique morphisme de $\Lambda_0/p^n\Lambda_0$ -algèbres à puissances divisées

$$\lambda_n: \mathcal{O}_n^{\text{cris}}(\Lambda|\Lambda_0) \rightarrow ((\Lambda_0/p^n\Lambda_0) \otimes_{W_n} W_n(\Lambda/p\Lambda))^{\text{DP}}.$$

Proposition 9.3.2. — *Si le Frobenius de $\Lambda/p\Lambda$ est surjectif, alors $\mathcal{O}_n^{\text{cris}}(\Lambda|\Lambda_0) \xrightarrow{\lambda_n} ((\Lambda_0/p^n\Lambda_0) \otimes_{W_n} W_n(\Lambda/p\Lambda))^{\text{DP}}$ est un isomorphisme (cf. [25, II.1.4]).*

Démonstration. — Notons tout d'abord qu'il existe un unique homomorphisme de $\Lambda_0/p^n\Lambda_0$ -algèbres

$$\tilde{\theta}_n: ((\Lambda_0/p^n\Lambda_0) \otimes_{W_n} W_n(\Lambda/p\Lambda))^{\text{DP}} \rightarrow \mathcal{O}_n^{\text{cris}}(\Lambda|\Lambda_0)$$

qui induit l'identité sur le quotient $\Lambda/p^n\Lambda$. Il est construit de la façon suivante. Soit $D \in \mathcal{I}$ un épaississement à puissances divisées de $\Lambda/p^n\Lambda$. Comme le Frobenius de $\Lambda/p\Lambda$ est surjectif, tout élément de $W_n(\Lambda/p\Lambda)$ s'écrit sous la forme $\sum_{i=0}^{n-1} p^i[\alpha_i]$ (où $[\alpha_i]$ désigne le représentant de Teichmüller de $\alpha_i \in \Lambda/p\Lambda$). Il existe alors un unique

homomorphisme $\tilde{\theta}_{n,D}: W_n(\Lambda/p\Lambda) \rightarrow D$ tel que $\tilde{\theta}_{n,D}([\alpha]) = \hat{\alpha}^{p^n}$ où $\hat{\alpha}$ est un relèvement de $\alpha \in \Lambda/p\Lambda$ dans D . En effet, comme c'est la n -ième composante fantôme de $[\hat{\alpha}] \in W_n(D)$, il suffit de vérifier que c'est indépendant du choix du relèvement. Un autre relèvement de α est de la forme $\hat{\alpha} + d$ avec $d \in \text{Ker}(D \rightarrow \Lambda/p\Lambda)$. On a $\text{Ker}(D \rightarrow \Lambda/p\Lambda) = \text{Ker}(D \rightarrow \Lambda/p^n\Lambda) + pD$: c'est un idéal à puissances divisées, donc $b^j \in j!D$ pour tout $j > 0$.

On a alors $(\hat{\alpha} + d)^{p^n} = \hat{\alpha}^{p^n} + \sum_{j=1}^{p^n} \binom{p^n}{j} b^j \hat{\alpha}^{p^n-j}$. Pour $j > 0$, on a $\binom{p^n}{j} b^j \hat{\alpha}^{p^n-j} \in j!(\binom{p^n}{j} D)$ d'après ce qui précède.

Comme $v(\binom{p^n}{j}) = n - v(j)$, on a $\binom{p^n}{j} b^j \hat{\alpha}^{p^n-j} = 0$ dans D (car D est une W_n -algèbre) et donc $(\hat{\alpha} + d)^{p^n} = \hat{\alpha}^{p^n}$.

Comme D est une $\Lambda_0/p^n\Lambda_0$ -algèbre, l'homomorphisme de W_n -algèbres $\tilde{\theta}_{n,D}$ induit un homomorphisme de $\Lambda_0/p^n\Lambda_0$ -algèbres $(\Lambda_0/p^n\Lambda_0) \otimes_{W_n} W_n(\Lambda/p\Lambda) \rightarrow D$ qu'on note encore $\tilde{\theta}_{n,D}$.

Comme le composé $(\Lambda_0/p^n\Lambda_0) \otimes_{W_n} W_n(\Lambda/p\Lambda) \xrightarrow{\tilde{\theta}_{n,D}} D \rightarrow \Lambda/p^n\Lambda$ est θ_{n,Λ_0} par construction, l'idéal $\text{Ker}(\theta_{n,\Lambda_0})$ est envoyé par $\tilde{\theta}_{n,D}$ sur le noyau de l'homomorphisme structural $D \rightarrow \Lambda/p^n\Lambda$, qui est un idéal à puissances divisées. On en déduit un homomorphisme $\tilde{\theta}_{n,D}: ((\Lambda_0/p^n\Lambda_0) \otimes_{W_n} W_n(\Lambda/p\Lambda))^{\text{DP}} \rightarrow D$ par la propriété universelle de l'enveloppe à puissances divisées.

Comme $\mathcal{O}_n^{\text{cris}}(\Lambda|\Lambda_0) = \varprojlim_{D \in \mathcal{I}} D$, il existe un unique homomorphisme $\tilde{\theta}_n: ((\Lambda_0/p^n\Lambda_0) \otimes_{W_n} W_n(\Lambda/p\Lambda))^{\text{DP}} \rightarrow \mathcal{O}_n^{\text{cris}}(\Lambda|W)$, limite projective des $\tilde{\theta}_{n,D}$, qui donne lieu au diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} ((\Lambda_0/p^n\Lambda_0) \otimes_{W_n} W_n(\Lambda/p\Lambda))^{\text{DP}} & \xrightarrow{\tilde{\theta}_n} & \mathcal{O}_n^{\text{cris}}(\Lambda|\Lambda_0) \\ & \searrow \theta_{n,\Lambda_0} & \swarrow \text{can.} \\ & \Lambda/p^n\Lambda & \end{array}$$

D'après l'unicité de l'homomorphisme $\tilde{\theta}_n: ((\Lambda_0/p^n\Lambda_0) \otimes_{W_n} W_n(\Lambda/p\Lambda))^{\text{DP}} \rightarrow \mathcal{O}_n^{\text{cris}}(\Lambda|\Lambda_0)$, et la propriété universelle de la limite projective, le composé $((\Lambda_0/p^n\Lambda_0) \otimes_{W_n} W_n(\Lambda/p\Lambda))^{\text{DP}} \xrightarrow{\tilde{\theta}_n} \mathcal{O}_n^{\text{cris}}(\Lambda|\Lambda_0) \xrightarrow{\lambda_n} ((\Lambda_0/p^n\Lambda_0) \otimes_{W_n} W_n(\Lambda/p\Lambda))^{\text{DP}}$ est l'identité.

Par ailleurs, pour $D \in \mathcal{I}$, l'homomorphisme composé $((\Lambda_0/p^n\Lambda_0) \otimes_{W_n} W_n(\Lambda/p\Lambda))^{\text{DP}} \xrightarrow{\tilde{\theta}_n} \mathcal{O}_n^{\text{cris}}(\Lambda|\Lambda_0) \rightarrow D$ est $\tilde{\theta}_{n,D}$ par construction, et l'homomorphisme composé $\mathcal{O}_n^{\text{cris}}(\Lambda|\Lambda_0) \xrightarrow{\lambda_n} ((\Lambda_0/p^n\Lambda_0) \otimes_{W_n} W_n(\Lambda/p\Lambda))^{\text{DP}} \xrightarrow{\tilde{\theta}_{n,D}} D$ est la projection canonique. Il en résulte que le composé $\mathcal{O}_n^{\text{cris}}(\Lambda|\Lambda_0) \xrightarrow{\lambda_n \circ \tilde{\theta}_n} \mathcal{O}_n^{\text{cris}}(\Lambda|\Lambda_0) \rightarrow D$ est la projection canonique. D'après la propriété universelle de la limite projective, l'homomorphisme $\lambda_n \circ \tilde{\theta}_n$ est l'identité. Les homomorphismes $\tilde{\theta}_n$ et λ_n sont donc des isomorphismes inverses l'un de l'autre. \square

Remarque 9.3.3. — Il est clair que l'homomorphisme λ_n est fonctoriel en Λ . Par ailleurs, la commutativité du diagramme de la preuve précédente montre qu'il est compatible aux filtrations, $(\mathcal{F}_n^{[r]}(\Lambda|\Lambda_0))$ sur $\mathcal{O}_n^{\text{cris}}(\Lambda|\Lambda_0)$ et par les puissances divisées de l'idéal $\text{Ker}(\theta_{n,\Lambda_0})$ sur $((\Lambda_0/p^n\Lambda_0) \otimes_{W_n} W_n(\Lambda/p\Lambda))^{\text{DP}}$.

Remarque 9.3.4. — Supposons que Λ est en outre muni d'une action d'un groupe G , par automorphismes de Λ_0 -algèbres. Par functorialité, G agit aussi sur $\mathcal{O}_n^{\text{cris}}(\Lambda|\Lambda_0)$ et $((\Lambda_0/p^n\Lambda_0) \otimes_{W_n} W_n(\Lambda/p\Lambda))^{\text{DP}}$. L'application λ_n correspondante est équivariante. C'est le cas pour $\Lambda = \overline{R}$, qui est muni d'une action de \mathcal{G}_R et Λ_0 une sous algèbre de R .

Supposons que $\Lambda_0/p^n\Lambda_0$ est muni d'un relèvement σ du Frobenius $\Lambda_0/p\Lambda_0 \rightarrow \Lambda_0/p\Lambda_0$ induisant le Frobenius habituel sur W . Par functorialité, l'anneau $\mathcal{O}_n^{\text{cris}}(\Lambda|\Lambda_0)$ est muni d'un Frobenius (endomorphisme semi-linéaire

par rapport à σ). Par ailleurs, on dispose d'un Frobenius agissant de façon diagonale sur l'anneau $(\Lambda_0/p^n\Lambda_0) \otimes_{W_n} W_n(\Lambda/p\Lambda)$. Comme la réduction modulo p de l'idéal $\text{Ker}(\theta_{n,\Lambda_0})$ est stable par ce dernier, il induit un Frobenius sur $((\Lambda_0/p^n\Lambda_0) \otimes_{W_n} W_n(\Lambda/p\Lambda))^{\text{DP}}$. D'après la remarque 9.3.3, l'homomorphisme λ_n est compatibles aux Frobenius de $\mathcal{O}_n^{\text{cris}}(\Lambda|\Lambda_0)$ et de $((\Lambda_0/p^n\Lambda_0) \otimes_{W_n} W_n(\Lambda/p\Lambda))^{\text{DP}}$.

Proposition 9.3.5. — Soit Λ'_0 une sous- Λ_0 -algèbre de Λ telle que $\Lambda'_0/p^n\Lambda'_0$ est étale sur $\Lambda_0/p^n\Lambda_0$. L'homomorphisme naturel $\mathcal{O}_n^{\text{cris}}(\Lambda|\Lambda'_0) \rightarrow \mathcal{O}_n^{\text{cris}}(\Lambda|\Lambda_0)$ est un isomorphisme.

Démonstration. — Notons \mathcal{I}_{Λ_0} (resp. $\mathcal{I}_{\Lambda'_0}$) la catégorie des $\Lambda_0/p^n\Lambda_0$ -algèbres (resp. des $\Lambda'_0/p^n\Lambda'_0$ -algèbres) qui sont des épaissements à puissances divisées de $\Lambda/p^n\Lambda$. On a un foncteur d'oubli $\mathcal{I}_{\Lambda'_0} \rightarrow \mathcal{I}_{\Lambda_0}$.

Soit $D \in \mathcal{I}_{\Lambda_0}$ une $\Lambda_0/p^n\Lambda_0$ -algèbre qui est un épaissement à puissances divisées de $\Lambda/p^n\Lambda$. Le noyau de l'homomorphisme structural $D \rightarrow \Lambda/p^n\Lambda$ est nilpotent (car il a des puissances divisées et est tué par p^n). Comme $\Lambda'_0/p^n\Lambda'_0$ est étale sur $\Lambda_0/p^n\Lambda_0$, l'homomorphisme structural $\Lambda'_0/p^n\Lambda'_0 \rightarrow \Lambda/p^n\Lambda$ se relève de façon unique en un homomorphisme $\Lambda'_0/p^n\Lambda'_0 \rightarrow D$, faisant de D une $\Lambda'_0/p^n\Lambda'_0$ -algèbre et rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & \Lambda/p^n\Lambda \\ \uparrow & \dashrightarrow & \uparrow \\ \Lambda_0/p^n\Lambda_0 & \longrightarrow & \Lambda'_0/p^n\Lambda'_0 \end{array}$$

Les catégories \mathcal{I}_{Λ_0} et $\mathcal{I}_{\Lambda'_0}$ sont donc équivalentes : on a donc $\mathcal{O}_n^{\text{cris}}(\Lambda|\Lambda_0) = \varprojlim_{D \in \mathcal{I}_{\Lambda_0}} D = \varprojlim_{D \in \mathcal{I}_{\Lambda'_0}} D = \mathcal{O}_n^{\text{cris}}(\Lambda|\Lambda'_0)$. \square

Lemme 9.3.6. — Soient A un anneau B une A -algèbre tels que A et B sont sans p -torsion et B/pB est étale sur A/pA . Alors pour tout $n \in \mathbf{N}_{>0}$, B/p^nB est étale sur A/p^nA .

Démonstration. — On peut supposer $n > 1$. Comme A est sans p -torsion on a la suite exacte $0 \rightarrow A/p^{n-1}A \xrightarrow{p} A/p^nA \rightarrow A/pA \rightarrow 0$. On en déduit la suite exacte $0 \rightarrow \text{Tor}_1^{A/p^nA}(A/pA, B/p^nB) \rightarrow B/p^{n-1}B \xrightarrow{p} B/p^nB$. L'anneau B étant sans p -torsion, on a donc $\text{Tor}_1^{A/p^nA}(A/pA, B/p^nB) = 0$. Comme B/pB est plat (car étale) sur A/pA , le critère local de platitude (cf. [42, Theorem 22.3]) implique que B/p^nB est plat sur A/p^nA .

Par ailleurs, comme B/pB est étale sur A/pA , c'est une A/pA -algèbre de type fini. Soient $b_1, \dots, b_r \in B$ des relèvements d'une famille de générateurs de B/pB sur A/pA . Alors les images de b_1, \dots, b_r dans B/p^nB l'engendrent comme A/p^nA -algèbre. En effet, B étant sans p -torsion, on a la suite exacte $0 \rightarrow B/pB \rightarrow B/p^nB \rightarrow B/p^{n-1}B \rightarrow 0$: on procède par récurrence. Le module des différentielles $\Omega_n = \Omega_{B/p^nB|A/p^nA}$ est donc de type fini sur B/p^nB . Comme B/pB est étale donc net sur A/pA , le module $\Omega_1 = \Omega_n \otimes_{B/p^nB} (B/pB)$ est nul. D'après le lemme de Nakayama, on a donc $\Omega_n = 0$. \square

Corollaire 9.3.7. — Supposons Λ et Λ_0 sans p -torsion. Soit Λ'_0 une sous- Λ_0 -algèbre de Λ telle que $\Lambda'_0/p\Lambda'_0$ est étale sur $\Lambda_0/p\Lambda_0$. L'homomorphisme naturel $\mathcal{O}_n^{\text{cris}}(\Lambda|\Lambda'_0) \rightarrow \mathcal{O}_n^{\text{cris}}(\Lambda|\Lambda_0)$ est un isomorphisme.

Démonstration. — D'après la proposition 9.3.5, il suffit de vérifier que $\Lambda'_0/p^n\Lambda'_0$ est étale sur $\Lambda_0/p^n\Lambda_0$. Il suffit d'appliquer le lemme 9.3.6 à $A = \Lambda_0$ et $B = \Lambda'_0$, ce qui est licite, vu que Λ'_0 est sans p -torsion, car inclus dans Λ qui est sans p -torsion. \square

Proposition 9.3.8. — Soit Λ_0 une $\mathbf{Z}_{(p)}$ -algèbre. Si X est un Λ_0 -schéma tel que le Frobenius sur la fibre spéciale est surjectif et si $m > 0$, alors

$$\mathbf{H}^m((X|\Lambda_0/p^n\Lambda_0)_{\text{cris}}, \text{faisceau structural}) = 0.$$

Démonstration. — Il suffit de le vérifier lorsque X est affine, $X = \text{Spec}(\Lambda)$ où Λ est une $\Lambda_0/p^n\Lambda_0$ -algèbre. Si B est une sous- $\Lambda_0/p\Lambda_0$ -algèbre de type fini de $\Lambda/p\Lambda$, on peut écrire $B = (\Lambda_0/p\Lambda_0)[x_1, \dots, x_r] = k[X_1, \dots, X_r]/(P_1, \dots, P_s)$. On choisit le relèvement lisse $\mathcal{B} = (\Lambda_0/p^n\Lambda_0)[X_1, \dots, X_r]$ de B sur $\Lambda_0/p^n\Lambda_0$. Le noyau de l'homomorphisme surjectif $\mathcal{B} \rightarrow B$ est alors $I_{\mathcal{B}} = (\hat{P}_1, \dots, \hat{P}_r, p)$ où \hat{P}_i est un relèvement de P_i dans \mathcal{B} . On note $\mathcal{D}_{\mathcal{B}}$ l'enveloppe à puissances divisées de \mathcal{B} relativement à l'idéal $I_{\mathcal{B}}$ (compatible aux puissances divisées de $\Lambda_0/p^n\Lambda_0$ pour $p\Lambda_0/p^n\Lambda_0$). On a alors $\mathbf{H}^m((B|\Lambda_0/p^n\Lambda_0)_{\text{cris}}, \mathcal{O}_{B|\Lambda_0/p^n\Lambda_0}) = \mathbf{H}^m(\mathcal{D}_{\mathcal{B}} \otimes_{\mathcal{B}} \Omega_{\mathcal{B}|\Lambda_0/p^n\Lambda_0}^\bullet)$ ([6, V Théorème 2.3.2]). Comme

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^m((\Lambda|\Lambda_0/p^n\Lambda_0)_{\text{cris}}, \text{faisceau structural}) &= \mathbf{H}^m((\Lambda/p\Lambda|\Lambda_0/p^n\Lambda_0)_{\text{cris}}, \mathcal{O}_{X|\Lambda_0/p^n\Lambda_0}) \\ &= \varinjlim_B \mathbf{H}^m((B|\Lambda_0/p^n\Lambda_0)_{\text{cris}}, \mathcal{O}_{B|\Lambda_0/p^n\Lambda_0}) \end{aligned}$$

la limite étant prise sur la catégorie filtrante des sous- $\Lambda_0/p\Lambda_0$ -algèbre de type fini de $\Lambda/p\Lambda$, il suffit de montrer que $\mathbf{H}^m(\mathcal{D}_{\mathcal{B}} \otimes_{\mathcal{B}} \Omega_{\mathcal{B}|\Lambda_0/p^n\Lambda_0}^\bullet)$ a une image nulle dans la limite projective.

On a un homomorphisme surjectif de $\Lambda_0/p^n\Lambda_0$ -algèbres $\mathcal{D}_{\mathcal{B}} \otimes_{\mathcal{B}} \Omega_{\mathcal{B}|\Lambda_0/p^n\Lambda_0}^m \rightarrow H^m(\mathcal{D}_{\mathcal{B}} \otimes_{\mathcal{B}} \Omega_{\mathcal{B}|\Lambda_0/p^n\Lambda_0}^{\bullet})$ et $\mathcal{D}_{\mathcal{B}} \otimes_{\mathcal{B}} \Omega_{\mathcal{B}|\Lambda_0/p^n\Lambda_0}^m \simeq \bigoplus_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_m \leq r} \mathcal{D}_{\mathcal{B}} dX_{i_1} \wedge \dots \wedge dX_{i_m}$. Soit $y_i \in \Lambda/p\Lambda$ tel que $y_i^{p^n} = x_i$ pour $i \in \{1, \dots, r\}$ et $B' = (\Lambda_0/p\Lambda_0)[y_1, \dots, y_r]$. Avec des notations évidentes, on a un homomorphisme surjectif de $\Lambda_0/p^n\Lambda_0$ -algèbres $\mathcal{D}_{\mathcal{B}'} \otimes_{\mathcal{B}'} \Omega_{\mathcal{B}'|\Lambda_0/p^n\Lambda_0}^m \rightarrow H^m(\mathcal{D}_{\mathcal{B}'} \otimes_{\mathcal{B}'} \Omega_{\mathcal{B}'|\Lambda_0/p^n\Lambda_0}^{\bullet})$ et $\mathcal{D}_{\mathcal{B}'} \otimes_{\mathcal{B}'} \Omega_{\mathcal{B}'|\Lambda_0/p^n\Lambda_0}^m \simeq \bigoplus_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_m \leq r} \mathcal{D}_{\mathcal{B}'} dY_{i_1} \wedge \dots \wedge dY_{i_m}$. De plus, on a un homomorphisme de $\Lambda_0/p^n\Lambda_0$ -algèbres $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'$; $X_i \mapsto Y_i^{p^n}$ donnant lieu au diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B} & \longrightarrow & \mathcal{B}' \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \longrightarrow & B'. \end{array}$$

On en déduit un homomorphisme $\mathcal{D}_{\mathcal{B}}$ -linéaire

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\mathcal{B}} \otimes_{\mathcal{B}} \Omega_{\mathcal{B}|\Lambda_0/p^n\Lambda_0}^m &\rightarrow \mathcal{D}_{\mathcal{B}'} \otimes_{\mathcal{B}'} \Omega_{\mathcal{B}'|\Lambda_0/p^n\Lambda_0}^m \\ dX_{i_1} \wedge \dots \wedge dX_{i_m} &\mapsto dY_{i_1}^{p^n} \wedge \dots \wedge dY_{i_m}^{p^n} = 0. \end{aligned}$$

On a donc un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}_{\mathcal{B}} \otimes_{\mathcal{B}} \Omega_{\mathcal{B}|\Lambda_0/p^n\Lambda_0}^m & \longrightarrow & H^m(\mathcal{D}_{\mathcal{B}} \otimes_{\mathcal{B}} \Omega_{\mathcal{B}|\Lambda_0/p^n\Lambda_0}^{\bullet}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{D}_{\mathcal{B}'} \otimes_{\mathcal{B}'} \Omega_{\mathcal{B}'|\Lambda_0/p^n\Lambda_0}^m & \longrightarrow & H^m(\mathcal{D}_{\mathcal{B}'} \otimes_{\mathcal{B}'} \Omega_{\mathcal{B}'|\Lambda_0/p^n\Lambda_0}^{\bullet}). \end{array}$$

La flèche de gauche étant nulle d'après ce qu'on vient de voir, il en est de même de celle de droite. En particulier, $H^m(\mathcal{D}_{\mathcal{B}} \otimes_{\mathcal{B}} \Omega_{\mathcal{B}|\Lambda_0/p^n\Lambda_0}^{\bullet})$ a donc une image nulle dans $H^m(\mathcal{D}_{\mathcal{B}'} \otimes_{\mathcal{B}'} \Omega_{\mathcal{B}'|\Lambda_0/p^n\Lambda_0}^{\bullet})$ et *a fortiori* dans $H^m((\Lambda|\Lambda_0/p^n\Lambda_0)_{\text{cris}}, \text{faisceau structural})$, ce qu'on voulait. \square

9.4. Cas d'une base lisse

On fait les hypothèses suivantes :

- (a) Le Frobenius σ de $\Lambda/p\Lambda$ est surjectif.
- (b) Le noyau de σ^n est principal.
- (c) Il existe des coordonnées $(T_i)_{1 \leq i \leq d}$ pour $\Lambda_0/p^n\Lambda_0$ sur W_n , de sorte que $\Lambda_0/p^n\Lambda_0$ est étale sur $W_n[T_1, \dots, T_d]$ (de sorte que l'anneau $\Lambda_0/p^n\Lambda_0$ est lisse sur W_n).

Choisissons $p^{(n)} \in \Lambda/p\Lambda$ engendrant $\text{Ker}(\sigma^n)$.

Proposition 9.4.1. — *L'anneau $\mathcal{O}_n^{\text{cris}}(\Lambda|W)$ est naturellement isomorphe à $W_n^{\text{DP}}(\Lambda/p\Lambda)$, enveloppe à puissances divisées de l'anneau $W_n(\Lambda/p\Lambda)$ relativement à l'idéal engendré par $[p^{(n)}]$.*

Démonstration. — D'après la proposition 9.3.2, l'anneau $\mathcal{O}_n^{\text{cris}}(\Lambda|W)$ est naturellement isomorphe à l'enveloppe à puissances divisées de l'anneau $W_n(\Lambda/p\Lambda)$ relativement à l'idéal $\text{Ker}(\theta_n)$. D'après la remarque 9.3.1 (avec $\Lambda_0 = W$), on a $\text{Ker}(\bar{\theta}_n) = \text{Ker}(\theta_n) + pW_n(\Lambda/p\Lambda)$, et l'enveloppe à puissances divisées de $W_n(\Lambda/p\Lambda)$ relativement à l'idéal $\text{Ker}(\theta_n)$ s'identifie à l'enveloppe à puissances divisées de $W_n(\Lambda/p\Lambda)$ relativement à l'idéal $\text{Ker}(\bar{\theta}_n)$.

Il suffit donc de montrer que $\text{Ker}(\bar{\theta}_n)$ est engendré par $[p^{(n)}]$ et p , et donc de voir que le noyau de l'homomorphisme $W_n(\Lambda/p\Lambda)/pW_n(\Lambda/p\Lambda) \rightarrow \Lambda/p\Lambda$ induit par $\bar{\theta}_n$ est engendré par $p^{(n)}$. Comme le Frobenius est surjectif sur $\Lambda/p\Lambda$, on a $W_n(\Lambda/p\Lambda)/pW_n(\Lambda/p\Lambda) = \Lambda/p\Lambda$. Cet homomorphisme s'identifie alors à $\sigma^n: \Lambda/p\Lambda \rightarrow \Lambda/p\Lambda$ (puissance n -ième du Frobenius) d'après l'expression de $\bar{\theta}_n$ (cf. remarque 9.3.1). \square

Pour $i \in \{1, \dots, d\}$, choisissons $T_i^{(n)}$ dans $\Lambda/p\Lambda$ tel que $(T_i^{(n)})^{p^n} = T_i$.

Proposition 9.4.2. — *L'anneau $\mathcal{O}_n^{\text{cris}}(\Lambda|\Lambda_0)$ est naturellement isomorphe à l'enveloppe à puissances divisées de l'anneau $W_n(\Lambda/p\Lambda)[T_1, \dots, T_d]$ relativement à l'idéal engendré par $\{1 \otimes [p^{(n)}], 1 \otimes [T_i^{(n)}] - T_i \otimes 1\}_{1 \leq i \leq d}$.*

Démonstration. — D'après la proposition 9.3.5, pour calculer $\mathcal{O}_n^{\text{cris}}(\Lambda|\Lambda_0)$, on peut se restreindre au cas où $\Lambda_0/p^n\Lambda_0 = W_n[T_1, \dots, T_d]$. D'après la proposition 9.3.2, l'anneau $\mathcal{O}_n^{\text{cris}}(\Lambda|\Lambda_0)$ est naturellement isomorphe à $((\Lambda_0/p^n\Lambda_0) \otimes_{W_n} W_n(\Lambda/p\Lambda))^{\text{DP}}$, l'enveloppe à puissances divisées de l'anneau $(\Lambda_0/p^n\Lambda_0) \otimes_{W_n} W_n(\Lambda/p\Lambda)$ relativement au noyau du morphisme de $\Lambda_0/p^n\Lambda_0$ -algèbres $\theta_{n,\Lambda_0}: (\Lambda_0/p^n\Lambda_0) \otimes_{W_n} W_n(\Lambda/p\Lambda) \rightarrow \Lambda/p^n\Lambda$. D'après la remarque 9.3.1, $\text{Ker}(\bar{\theta}_{n,\Lambda_0}) = \text{Ker}(\theta_{n,\Lambda_0}) + p((\Lambda_0/p^n\Lambda_0) \otimes_{W_n} W_n(\Lambda/p\Lambda))$, et l'enveloppe à puissances divisées de $(\Lambda_0/p^n\Lambda_0) \otimes_{W_n} W_n(\Lambda/p\Lambda)$ relativement à l'idéal $\text{Ker}(\theta_{n,\Lambda_0})$ s'identifie à l'enveloppe à puissances divisées de $(\Lambda_0/p^n\Lambda_0) \otimes_{W_n} W_n(\Lambda/p\Lambda)$ relativement à l'idéal $\text{Ker}(\bar{\theta}_{n,\Lambda_0})$.

Il s'agit donc de montrer que le noyau de l'homomorphisme $\bar{\theta}_{n,\Lambda_0} : (\Lambda_0/p^n\Lambda_0) \otimes_{W_n} W_n(\Lambda/p\Lambda) \rightarrow \Lambda/p\Lambda$ est engendré par p , $[p^{(n)}]$ et $\{1 \otimes [T_i^{(n)}] - T_i \otimes 1\}_{1 \leq i \leq d}$, soit encore que le noyau de l'homomorphisme $(\Lambda_0/p\Lambda_0) \otimes_k (\Lambda/p\Lambda) \rightarrow \Lambda/p\Lambda; a \otimes b \mapsto ab^{p^n}$ est engendré par $p^{(n)}$ et $\{1 \otimes T_i^{(n)} - T_i \otimes 1\}_{1 \leq i \leq d}$ (cf. l'expression de $\bar{\theta}_n$, remarque 9.3.1).

Comme on a $\Lambda_0/p^n\Lambda_0 = W_n[T_1, \dots, T_d]$, il s'agit de montrer que le noyau de l'homomorphisme

$$f : (\Lambda/p\Lambda)[T_1, \dots, T_d] \rightarrow \Lambda/p\Lambda$$

donné par $f(a) = a^{p^n}$ pour $a \in \Lambda/p\Lambda$ et $f(T_i) = T_i$ pour $i \in \{1, \dots, d\}$ est engendré par $p^{(n)}$ et $\{T_i^{(n)} - T_i\}_{1 \leq i \leq d}$. En effectuant des divisions euclidiennes par les polynômes $T_i - T_i^{(n)}$, il suffit de voir que le noyau de $\sigma^n : \Lambda/p\Lambda \rightarrow \Lambda/p\Lambda$ est engendré par $p^{(n)}$, ce qui est vrai par hypothèse. \square

BIBLIOGRAPHIE

- [1] **Andreatta F.** Generalized (φ, Γ) -modules.
- [2] **Andreatta F., Brinon O.**, Représentations p -adiques surconvergentes : le cas relatif.
- [3] **Berger L.** Représentations p -adiques et équations différentielles, *Invent. Math.* **148**, 219-284 (2002).
- [4] **Berger L.** An introduction to the theory of p -adic representations, *Geometric Aspects of Dwork Theory, de Gruyter* 255-292 (2004).
- [5] **Berger L.** Équations différentielles p -adiques et (φ, N) -modules filtrés, prépublication.
- [6] **Berthelot P.** Cohomologie cristalline des schémas de caractéristique $p > 0$, *Lecture Notes in Mathematics* **407**, Springer Verlag (1974).
- [7] **Berthelot P., Ogus A.** Notes on crystalline cohomology, *Mathematical notes* **21**, Princeton University Press (1978).
- [8] **Berthelot P., Messing W.** Théorie de Dieudonné cristalline III : Théorèmes d'équivalence et de pleine fidélité, "The Grothendieck Festschrift", vol. I, *Progr. Math.* **86**, Birkhäuser, 173-247 (1990).
- [9] **Brinon O.** Une généralisation de la théorie de Sen, *Math. Ann.* **327**, 793-813 (2003).
- [10] **Brinon O.** Représentations cristallines dans le cas d'un corps résiduel imparfait, *Annales de l'Institut Fourier* **56**, 919-999 (2006).
- [11] **Bourbaki N.** Algèbre commutative, Chapitre 5, *Masson*, (1985).
- [12] **Cassels J., Fröhlich A.** Algebraic Number Theory, *Academic Press*, (1967).
- [13] **Cherbonnier F., Colmez P.** Représentations p -adiques surconvergentes, *Invent. Math.* **133**, 581-611 (1998).
- [14] **Colmez P., Fontaine J.-M.** Construction des représentations p -adiques semi-stables, *Invent. Math.* **140**, 1-43 (2000).
- [15] **Colmez P.** Espaces de Banach de dimension finie, *J. Inst. Math. Jussieu* **1** no. 3, 331-439 (2002).
- [16] **Colmez P.** Les conjectures de monodromie p -adique, *Sem. Bourbaki* **897**, 54^{ème} année (2001-2002).
- [17] **Deligne P.** Théorie de Hodge II, *Publ. Math. I.H.E.S.* **40** (1971).
- [18] **Deligne P.** Cohomologie étale (SGA 4 $\frac{1}{2}$), *Lecture Notes in Mathematics* **569**, Springer Verlag (1977).
- [19] **Deligne P., Milne J.** Tannakian categories, in Hodge cycles, motives and Shimura varieties, *Lecture Notes in Mathematics* **900**, Springer Verlag (1982).
- [20] **Faltings G.** p -adic Hodge theory, *Journal of the AMS* **1**, 255-299 (1988).
- [21] **Faltings G.** Crystalline cohomology and p -adic Galois-representations, *Algebraic analysis, geometry, and number theory, Johns Hopkins Univ. Press*, 25-80 (1989).
- [22] **Faltings G.** Almost étale extensions, *Cohomologies p -adiques et applications arithmétiques (II)*, *Astérisque* **279**, 185-270 (2002).

- [23] **Fontaine J.-M., Wintenberger J.-P.** Le corps des normes de certaines extensions algébriques de corps locaux, *C.R.A.S.* **288** 367-370 (1979).
- [24] **Fontaine J.-M.** Formes différentielles et modules de Tate des variétés abéliennes sur les corps locaux, *Invent. Math.* **65**, 379-409 (1982).
- [25] **Fontaine J.-M., Messing W.** p -adic periods and p -adic étale cohomology, *Contemporary Mathematics* **67** (1987).
- [26] **Fontaine J.-M.** Représentations p -adiques des corps locaux, “*The Grothendieck Festschrift*”, vol. II, *Progr. Math.* **87**, Birkhauser 249-309 (1991).
- [27] **Fontaine J.-M.** Le corps des périodes p -adiques, *Périodes p -adiques*, *Astérisque* **223**, SMF (1994).
- [28] **Fontaine J.-M.** Représentations p -adiques semi-stables, *Périodes p -adiques*, *Astérisque* **223**, SMF (1994).
- [29] **Fontaine J.-M.** Analyse p -adique et représentation galoisiennes, *Proceedings of the I.C.M. Pékin*, vol. II, 139-148 (2002).
- [30] **Fontaine J.-M.** Arithmétique des représentations galoisiennes p -adiques, *Cohomologies p -adiques et applications arith- métiques (III)*, *Astérisque* **295**, SMF (2004).
- [31] **Grothendieck A.** EGA III, Étude cohomologique des faisceaux cohérents, première partie, *Publ. Math. I.H.E.S.* **11** (1961).
- [32] **Grothendieck A.** EGA IV, Étude locale des schémas et des morphismes de schémas, tome 1, *Publ. Math. I.H.E.S.* **20** (1964).
- [33] **Grothendieck A.** EGA IV, Étude locale des schémas et des morphismes de schémas, tome 2, *Publ. Math. I.H.E.S.* **24** (1965).
- [34] **Grothendieck A.** EGA IV, Étude locale des schémas et des morphismes de schémas, tome 4, *Publ. Math. I.H.E.S.* **32** (1967).
- [35] **Grothendieck A.** Revêtements étales et groupe fondamental (SGA 1), *Lecture Notes in Mathematics* **224**, Springer Verlag (1971).
- [36] **Hyodo O.** On the Hodge-Tate decomposition in the imperfect residue field case, *Crelle* **365**, 97-113 (1987).
- [37] **Hyodo O.** On variation of Hodge-Tate structures, *Math. Ann.* **283**, 7-22 (1989).
- [38] **Jannsen U.** Continuous étale cohomology, *Math. Ann.* **280**, 207-245 (1988).
- [39] **Katz N.** Nilpotent connections and the monodromy theorem : applications of a result of Turrittin, *Publ. Math. I.H.E.S.* **39**, 175-232 (1970).
- [40] **Katz N.** Slope filtration of F -crystals, *Astérisque* **63**, SMF (1979).
- [41] **M. Kisin**, Crystalline representations and F -crystals, *Algebraic Geometry and Number Theory*, *Drinfeld 50th Birthday volume*, *Prog. Math.* **253**, Birkhauser, 459-496 (2006).
- [42] **Matsumura H.** Commutative ring theory, *Cambridge University press* (1986).
- [43] **M. Raynaud.** Anneaux locaux henséliens, *Lecture Notes in Mathematics* **169**, Springer Verlag (1970).
- [44] **Sen S.** Continuous cohomology and p -adic Galois representations, *Invent. Math.* **62**, 89-116 (1980).
- [45] **Serre J.-P.** Corps locaux (3ème édition), *Hermann* (1968).
- [46] **Tate J.** p -divisible groups, in *Proceedings of a conference on local fields*, Springer Verlag, 158-183 (1967).
- [47] **Tate J.** Relations between K_2 and Galois cohomology, *Invent. Math.* **36**, 257-274 (1976).
- [48] **Tsuji T.** p -adic étale cohomology and crystalline cohomology in the semi-stable reduction case, *Invent. Math.* **137** no. 2, 233-411 (1999).
- [49] **Wintenberger J.-P.** Théorème de comparaison p -adique pour les schémas abéliens I. Construction de l'accouplement de périodes, *Périodes p -adiques*, *Astérisque* **223**, SMF, 349-397 (1994).