LE HALO SPECTRAL

par

Fabrizio, Adrian and Vincent

Résumé. — Nous construisons un espace de formes surconvergentes en caractéristique p, un opérateur compact sur cet espace, et nous montrons que la série caractéristique de cet opérateur est la réduction modulo p de la série universelle de Coleman. Nous démontrons que les formes surconvergentes en caractéristique p de pente finie se déforment vers la caractéristique 0.

1. Introduction

1.1. Présentation des résultats. — Soit p un nombre premier et N un entier premier à p. Soit X la courbe modulaire sur $\mathbb{Z}_p$ de niveau N. Soit $\bar{X}$ sa réduction modulo p, $\bar{X}_{ord}$ le lieu ordinaire et $\mathfrak{X}_{ord}$ le schéma formel p-adique lieu ordinaire. Soit $\bar{x}$ un point géométrique de $\bar{X}_{ord}$ et $\rho : \Pi_1(\bar{X}_{ord}, \bar{x}) \to \mathbb{Z}_p^\times$ la représentation donnée par la tour d'Igusa qui paramètre les trivialisations de la partie multiplicative du module de Tate du schéma semi-abélien universel. Pour tout caractère $\kappa : \mathbb{Z}_p^\times \to \mathbb{C}_p^\times$, l'équivalence de Katz [**17**], associe à $\kappa\circ\rho$ un ϕ-module étale ω^κ sur $\mathfrak{X}_{ord}$. Ses sections globales sont l'espace M_κ^{p-ad} des formes modulaires p-adiques de poids κ. L'opérateur de Dwork associé est $U_p = p^{-1}\mathrm{Tr}_\phi$. Dans [**17**] si κ est algébrique, puis dans [**7**] (complété par [**9**], [**5**] et revisité dans [**1**] et [**21**]), il est démontré que le ϕ-module ω^κ surconverge. Ses sections surconvergentes sont l'espace $M_\kappa^\dagger$ des formes modulaires surconvergentes de poids κ.

L'opérateur U_p est compact et on peut définir, d'après [**23**], la série caractéristique $\mathcal{P}_\kappa(X) := \det(1 - XU_p|M_\kappa^\dagger)$ qui est une fonction entière de la variable X.

Notons $\Lambda = \mathbb{Z}_p[[\mathbb{Z}_p^\times]]$ l'algèbre d'Iwasawa. Coleman montre de plus l'existence d'une série caractéristique universelle $\mathcal{P}(X) \in \Lambda[[X]]$ qui interpole les différentes séries caractéristiques $\mathcal{P}_\kappa(X)$. Notons $\mathcal{W}^{rig} = (\mathrm{Spf}\ \Lambda)^{rig}$ l'espace rigide des poids, qui est une union finie $\coprod \mathcal{W}_\chi^{rig}$ de boules ouvertes de rayon 1 paramétrées par les caractères $\chi : (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{C}_p^\times$ (où $q = 4$ si $p = 2$ et $q = p$ sinon). Coleman et Mazur définissent la variété spectrale $\mathcal{Z}^{rig} = V(\mathcal{P}) \subset \mathcal{W}^{rig} \times \mathbb{A}^1$. Ses points sont des couples (κ, α^{-1}) où κ est un poids et α une valeur propre non nulle de U_p agissant sur $M_\kappa^\dagger$. Il définissent également la courbe de Hecke $\mathcal{E}^{rig} \to \mathcal{Z}^{rig}$ dont les points sont des triplets $(\kappa, \alpha^{-1}, \lambda)$ où $(\kappa, \alpha^{-1}) \in \mathcal{Z}^{rig}$ et λ est un système de valeurs propres de Hecke agissant sur l'espace propre $(M_\kappa^\dagger)^{U_p=\alpha}$.

Bien que la construction de la variété de Hecke soit de nature rigide analytique, il est surprenant que la série caractéristique $\mathcal{P}(X)$ soit à coefficient entier. Ceci suggère la possibilité d'une théorie entière des formes surconvergentes. Ce travail a pour but d'établir une telle théorie. Notre point de départ est une conjecture de Coleman sur la réduction modulo p de la série caractéristique. Fixons un isomorphisme $\Lambda \simeq \mathbb{Z}_p[(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times][[T]]$, en envoyant $\exp(q)$ sur $1+T$. Pour tout caractère χ de $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$, notons $\mathcal{P}_\chi(X) \in \mathbb{Z}_p[[T]][[X]]$ la χ-partie de $\mathcal{P}(X)$ et $\overline{\mathcal{P}_\chi}(X) \in \mathbb{F}_p[[T]][[X]]$ sa réduction modulo p. Notons aussi $\bar{\kappa}_\chi$: $\mathbb{Z}_p^\times \to \mathbb{F}_p[[T]]^\times$ le caractère obtenu par réduction du caractère universel et projection sur la χ-partie (on remarquera que si $p=2$, $\bar{\kappa}_\chi$ est indépendant de χ). Dans [**8**], Coleman observe que c'est une série entière de la variable X à coefficient dans l'anneau $\mathbb{F}_p[[T]]$ equipé de la topologie T-adique et il conjecture le résultat suivant :

Conjecture 1 **([8])**. — *Pour chaque caractère χ du groupe $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$, on possède un $\mathbb{F}_p((T))$-espace de formes surconvergentes $M^\dagger_{\bar{\kappa}_\chi}$ de poids $\bar{\kappa}_\chi$ et un opérateur compact U_p dont la série caractéristique est $\overline{\mathcal{P}_\chi}(X)$.*

Pour tout caractère $\bar{\kappa}_\chi$ comme au dessus, l'équivalence de Katz associe à $\bar{\kappa}_\chi \circ \rho$: $\Pi_1(\bar{X}_{ord}, \bar{x}) \to \mathbb{F}_p[[T]]^\times$ un ϕ-module étale $\omega^{\bar{\kappa}_\chi}$ sur le schéma formel T-adique $\mathfrak{X}_{ord,\{\infty\}} := \bar{X}_{ord} \times_{\mathrm{Spec}\ \mathbb{F}_p} \mathrm{Spf}\ \mathbb{F}_p[[T]]$. Notons $\mathcal{X}_{\{\infty\}}$ l'espace rigide sur $\mathbb{F}_p((T))$ associé au schéma formel $\bar{X} \times_{\mathrm{Spec}\ \mathbb{F}_p} \mathrm{Spf}\ \mathbb{F}_p[[T]]$ et $\mathcal{X}_{ord,\{\infty\}} \subset \mathcal{X}_{\{\infty\}}$ l'ouvert ordinaire. On peut alors se demander si le ϕ-module étale $\omega^{\bar{\kappa}_\chi}$ surconverge sur un voisinage de $\mathcal{X}_{ord,\{\infty\}}$ dans $\bar{\mathcal{X}}$.

Théorème 1.1. — *Le ϕ-module $\omega^{\bar{\kappa}_\chi}$ est surconvergent.*

Nous définissons alors $M^\dagger_{\bar{\kappa}_\chi}$ comme l'espace des sections surconvergentes de $\omega^{\bar{\kappa}_\chi}$. On possède sur cet espace un opérateur compact U_p associé à ϕ. On peut définir sa série caractéristique, et on veut vérifier qu'elle vaut $\overline{\mathcal{P}_\chi}(X)$. Il nous faut à présent relier cet espace aux espaces de formes surconvergentes de caractéristique 0.

Commençons par "compactifier" l'espace des poids. L'idée est d'ajouter à $\mathcal{W}^{rig}$ les caractères $\bar{\kappa}_\chi$. Cet espace des poids compactifié possèdera donc des points de caractéristique 0 et p, on sort du cadre classique de la géométrie rigide, et nous utilisons à présent la théorie des espaces adiques de Huber. Définissons donc $\mathcal{W} = \mathrm{Spa}\ (\Lambda, \Lambda)^{an}$, c'est l'ouvert des points analytiques de $\mathrm{Spa}\ (\Lambda, \Lambda)$. Comme ensemble, $\mathcal{W} = \mathcal{W}^{rig} \bigcup \{\bar{\kappa}_\chi,\ \chi : \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}^\times \to \mathbb{C}_p^\times\}$ (dorénavant $\mathcal{W}^{rig}$ désigne l'espace adique associé à $\mathcal{W}^{rig}$). Tout voisinage ouvert de $\{\bar{\kappa}_\chi\}$ dans $\mathcal{W}$ contient une couronne de rayon extérieur 1 dans la composantes connexe $\mathcal{W}^{rig}_\chi$ de $\mathcal{W}^{rig}$ (resp. dans chaque composante connexe de $\mathcal{W}^{rig}$ si $p=2$).

On possède un faisceau stuctural $(\mathscr{O}_\mathcal{W}, \mathscr{O}^+_\mathcal{W})$ et sur $\mathscr{O}^+_\mathcal{W}$ la topologie est (p,T)-adique. Plus précisément, sur tout ouvert quasi-compact de $\mathcal{W}^{rig}$, la topologie (p,T)-adique coincide avec la topologie p-adique. Inversement, sur tout ouvert quasi-compact qui évite les centres $T=0$ des disques ouverts $\mathcal{W}^{rig}_\chi$ la topologie (p,T)-adique coincide avec la topologie T-adique. On assiste donc, à mesure qu'on se rapproche du bord de $\mathcal{W}$, à un glissement de la topologie p-adique vers la topologie T-adique.

Considérons la courbe modulaire relative $\mathcal{M}_{[0,\infty]} = X \times_{\mathrm{Spec}\ \mathbb{Z}_p} \mathcal{W} \to \mathcal{W}$ et son ouvert ordinaire $\mathcal{M}_{ord,[0,\infty]}$. La construction de Katz appliquée au caractère universel $\mathbb{Z}_p^\times \to \Lambda^\times$ et à ρ nous fournit une famille universelle $\omega^\kappa_{[0,\infty]}$ de ϕ-modules sur $\mathcal{M}_{ord,[0,\infty]}$. Un système fondamental de voisinages de $\mathcal{M}_{ord,[0,\infty]}$ dans $\mathcal{M}_{[0,\infty]}$ est donné par les ouverts $\mathcal{M}_{r,[0,\infty]}$ d'équation :

$$|\tilde{\mathrm{Ha}}^{p^{r+1}}| \geq \sup\{|T|, |p|\}$$

où $\tilde{\mathrm{Ha}}$ désigne un relèvement arbitraire local de l'invariant de Hasse. Si on regarde ces voisinages pour la topologie p-adique sur l'ouvert $\mathcal{W}^{rig}$, alors ils se rétrécissent vers le lieu ordinaire à l'infini. Dans [**1**] et [**21**], nous avons montré la surconvergence de $\omega^\kappa_{[0,\infty]}$ au dessus de $\mathcal{W}^{rig}$ et dans le théorème 1.1 nous avons montré la surconvergence à l'infini. Le théorème suivant unifie ces deux résultats :

Théorème 1.2. — *La famille universelle de ϕ-modules $\omega^{\kappa}_{[0,\infty]}$ sur $\mathcal{M}_{ord,[0,\infty]}$ surconverge sur $\mathcal{M}_{r,[0,\infty]}$ pour $r \geq 3$ (resp. $r \geq 5$ si $p = 2$).*

La série caractéristique associée à cette famille de ϕ-modules est à coefficient dans $\Lambda = \mathrm{H}^0(\mathcal{W}, \mathscr{O}_{\mathcal{W}})$. Par fonctorialité, on vérifie que c'est bien la série caractéristique de Coleman. Nous sommes donc en mesure d'établir la conjecture 1 :

Corollaire 1.1. — *La série caractéristique de U_p sur $M^{\dagger}_{\bar{\kappa}_\chi}$ vaut $\overline{\mathcal{P}_\chi}$.*

Soit $\mathcal{Z} = V(\mathcal{P}) \subset \mathcal{W} \times \mathbb{A}^1$ la variété spectrale adique "compactifiée" en ajoutant des points $(\bar{\kappa}_\chi, \alpha^{-1})$ à l'infini où α est une valeur propre non nulle de U_p agissant sur $M^{\dagger}_{\bar{\kappa}_\chi}$. On possède sur $\mathcal{Z}$ un faisceau cohérent sans torsion $M^{\dagger}$ d'espaces caractéristiques de formes surconvergentes et une courbe de Hecke adique $\mathcal{E} \to \mathcal{Z}$ où $\mathscr{O}_{\mathcal{E}}$ est le sous-faisceau de $\mathrm{End}_{\mathcal{Z}}(M^{\dagger})$ engendré par les opérateurs de Hecke. Le théorème suivant généralise les résultats du chapitre 7 de [**9**]. Il montre l'existence de familles de pente finie pour la topologie T-adique au voisinage de l'infini.

Théorème 1.3. — *Le morphisme $\mathcal{Z} \to \mathcal{W}$ est localement fini et plat sur $\mathcal{Z}$.*

En particulier, toute forme de pente finie dans $M^{\dagger}_{\bar{\kappa}_\chi}$ est la spécialisation d'une famille de pente finie paramétrée par un revêtement fini et plat d'un ouvert de $\{\bar{\kappa}_\chi\}$ dans $\mathcal{W}_\chi$.

1.2. Questions et perspectives. —

1.2.1. Polygone de Newton au bord de l'espace des poids. — Buzzard et Kilford [**6**] ont étudié la variété spectrale en niveau 1 pour $p = 2$. Ils ont démontré que pour les poids κ vérifiant $v(\kappa(5) - 1) < 3$ et $\kappa(1) = -1$, les pentes de l'operateur U_p sur l'espace des formes de poids κ sont $0, t, 2t, 3t, ...$ où $t = v_2(\kappa(5) - 1)$. La généralisation suivante de ce résultat est conjecturée :

Conjecture 2 **([18]).** — *Soit (n_i, m_i) les points de rupture du polygone de Newton de $\overline{\mathcal{P}}_\chi$. Il existe $r < 1$ tel que pour tout κ sur la couronne d'équation $r < |T| < 1$ de $\mathcal{W}_\chi$, les points de rupture du polygone de Newton de $\mathcal{P}_\kappa$ sont $(n_i, v_p(\kappa(1+q) - 1)m_i)$.*

Pour les formes surconvergentes quaternioniques, cette conjecture est démontrée dans la prépublication [**18**]. Signalons également que dans [**2**], il est démontré que la conjecture entraîne que les pentes du polygone de Newton de $\overline{\mathcal{P}}_\chi$ forment une union finie de progressions arithmétiques. Ce résultat est obtenu indépendamment dans [**18**].

question 1.1. — Existe-t-il un opérateur géométrique sur $M^{\dagger}_{\bar{\kappa}_\chi}$ qui explique cette progression arithmétique ?

1.2.2. Dimension supérieure. — Les résultats de cet article devraient pouvoir se généraliser sans trop de problème à des variétés de Shimura PEL plus générales. Remarquons que le bord de l'espace des poids compactifié sera toujours un fermé de codimension 1, et donc de dimension positive dès que le rang du groupe est au moins 2. A notre connaissance, il n'y a pas de conjecture sur les pentes de Newton au bord en dimension supérieure.

1.2.3. Théorie de Hodge. — Soit $f \in M^{\dagger}_{\bar{\kappa}_\chi}$ une forme surconvergente de pente finie, propre pour l'algèbre de Hecke. On peut alors lui associer une représentation semi-simple continue :

$$\rho_f : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\bar{\mathbb{F}}_p[[t]]).$$

Ici t est une variable, en fait t est une uniformisante d'une éxtension finie de $\bar{\mathbb{F}}_p((T))$. Cette représentation est impaire et vérifie la compatibilité locale globale semi-simplifiée hors de p. De plus det $\rho_f = (\bar{\kappa}_\chi^{-1} \circ \chi_{cycl}) \cdot \omega$ où χ_{cycl} désigne le caractère cyclotomique et ω sa réduction modulon p. Se pose la question de décrire la représentation $\rho_f|_{G_{\mathbb{Q}_p}}$. Si f de pente nulle vérifie $U_p f = \alpha.f$, alors d'après la théorie de Hida ([**26**], thm. 2),

$$\rho_f|_{G_{\mathbb{Q}_p}} \simeq \begin{pmatrix} nr(\alpha) & \star \\ 0 & nr(\alpha^{-1})(\bar{\kappa}_\chi^{-1} \circ \chi_{cycl}).\omega \end{pmatrix}$$

où $nr(\alpha)$ est le caractère non ramifié qui applique le Frobenius géométrique sur α.

Dans le cas de pente finie, on peut espérer que les choses se passent comme en caractéristique 0. Soit $\mathbb{D}$ la boule unité ouverte de la variable Z sur le corps non-archimédien $\bar{\mathbb{F}}_p((t))$. On définit des actions de ϕ et $\Gamma = \mathbb{Z}_p^\times$ par les formules habituelles $\phi(Z) = Z^p$ et $\gamma(Z) = (1+Z)^\gamma - 1$. L'anneau de Robba $\mathcal{R}$ est (dans ce contexte) l'anneau des séries $f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n Z^n$ à coefficient dans $\bar{\mathbb{F}}_p((t))$ qui converge sur une couronne non vide $0 < v(Z) < r(f)$. Un (ϕ, Γ)-module est un $\mathcal{R}$-module libre de rang fini muni d'actions semi-linéaires de ϕ et Γ qui commutent, et telles que le linéarisé de ϕ soit un isomorphisme. En utilisant les méthodes de [**3**], on démontre :

Théorème 1.4. — *A toute représentation continue $\rho : G_{\mathbb{Q}_p} \to \mathrm{GL}_n\big(\bar{\mathbb{F}}_p((t))\big)$ on peut associer un (ϕ, Γ)-module $\mathscr{D}(\rho)$.*

On devrait pouvoir (suivant [**13**]) construire une filtration de Harder-Narishiman sur la catégorie des (ϕ, Γ)-modules et démontrer qu'on a une équivalence entre représentations de $G_{\mathbb{Q}_p}$ et (ϕ, Γ)-modules semi-stables de pente 0.

question 1.2. — Soit ρ_f la représentation associée à une forme modulaire de pente finie. Le (ϕ, Γ)-module $\mathscr{D}(\rho_f)$ est-il triangulin ?

Plus précisément, on devrait possèder une suite exacte $0 \to L \to \mathscr{D}(\rho_f) \to L' \to 0$ où L est le (ϕ, Γ)-module de rang 1 avec action de ϕ par α et action triviale de Γ.

question 1.3. — Peut-on caractériser quand une représentation semi-simple continue impaire $\rho : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2\big(\bar{\mathbb{F}}_p((T))\big)$ est la représentation associée à une forme surconvergente de pente finie ?

On éspère revenir bientôt sur ces questions.

1.3. Description de l'article. — Dans la section 2, nous définissons la compactification de l'espace des poids $\mathcal{W}$ dans la catégorie des espaces adiques. Nous expliquons que la topologie est p-adique au centre $T = 0$ et T-adique au bord $p = 0$. Nous étudions également les propriétés d'analyticité du caractère universel. Plus on est proche du centre $T = 0$ de l'espace des poids, plus le caractère est analytique. En revanche, au bord $p = 0$, le caractère n'est pas localement analytique.

Dans la section 3, nous appliquons la théorie du sous-groupe canonique aux courbes modulaires. Nous construisons, par éclatement, des modèles formels de voisinages stricts du lieu ordinaire. Nous définissons aussi des revêtements "tour d'Igusa partielle" de ces voisinages stricts. Ce sont là des constructions classiques dans la théorie.

Dans la section 4, nous définissons les espaces de formes surconvergentes en caractéristique p. La situation en caractéristique p est très spéciale. D'une part, on possède des sous-groupes canoniques de tout ordre donnés par les noyaux des itérés du Frobenius. Un tel énoncé n'est vrai que sur le lieu ordinaire en caractéristique 0. D'autre part, le caractère universel de $\mathbb{Z}_p^\times$ n'est pas localement analytique, alors qu'il l'est en caractéristique 0. Nous construisons une tour d'Igusa surconvergente d'ordre infini, et nous montrons que la construction de Katz en caractéristique p garde un sens dans le contexte surconvergent.

Nous vérifions ensuite qu'elle fournit des bons objets. Cela repose au final sur une étude fine de la ramification de la tour d'Igusa aux points supersinguliers.

Dans la section 5, nous reprenons notre construction de la famille universelle de faisceaux sur l'espace rigide des poids usuel. Cette construction repose sur l'analyticité locale du caractère universel et sur l'existence de sous-groupes canoniques d'ordre fini sur des voisinages stricts du lieu ordinaire. Nous améliorons nos résultats antérieurs car nous construisons aussi des modèles entiers canoniques inversibles pour nos faisceaux de formes surconvergentes. Faisons une remarque importante qui justifie le changement de la topologie p-adique vers la topologie T-adique : plus le caractère est proche du bord de l'espace des poids, moins il est localement analytique, et plus on a besoin d'avoir un sous-groupe canonique d'ordre grand pour faire la construction. Traditionnellement, on utilisait la topologie p-adique pour décrire l'espace des poids, et plus on voulait travailler avec des caractères proches du bord, plus on devait rapetisser les voisinages du lieu ordinaire. En réalité, si on utilise la topologie T-adique au voisinage du bord de l'espace des poids (ce qui est plus naturel), on peut construire la famille de faisceaux sur l'espace rigide sur un voisinage strict de rayon constant !

Dans la section 6, nous recollons les constructions sur l'espace rigide et en caractéristique p. Nous avons pas réussit à faire cela simplement pour deux raisons. En caractéristique p nous avons utilisé le sous-groupe canonique d'ordre infini qui ne surconverge pas en caractéristique 0. En caractéristique 0 nous avons utilisé l'analyticité locale du caractère universelle qui est fausse en caractéristique p. Pour recoller les constructions, nous avons utilisé un revêtement pro-fini perfectoide d'un voisinage strict du lieu ordinaire : "la tour anti-canonique". Au dessus de ce revêtement on a (tautologiquement) la surconvergence de la tour d'Igusa. Cela permet, comme si on était sur le lieu ordinaire, de donner une définition uniforme (et donc indépendante de la caractéristique) du faisceau des formes modulaires surconvergentes "perfectisées". On démontre ensuite, au moyen de traces de Tate, que le faisceau perfectisé descend et réalise le recollement des faisceaux construits dans les sections 4 et 5. Cela nous permet finalement de construire une courbe de Hecke adique et de vérifier la conjecture de Coleman.

L'article contient deux appendices. La première est consacrée à la théorie du sous-groupe canonique que nous reformulons au niveau de généralité dont nous avons besoin : sans supposer que la topologie et p-adique et sans extraire de racines de p. La seconde appendice est consacrée à la théorie spectrale de Coleman que nous étendons aux espaces adiques analytiques.

1.4. Remerciements. — Nous remercions P. Scholze pour une discussion très intéressante et sa suggestion d'utiliser les espaces adiques pour compactifier l'espace des poids. Nous remercions également J. Bergdall, B. Stroh et L. Xiao pour des échanges stimulants. Durant la préparation de ce travail, nous avons séjourné à l'ENS Lyon, à l'université de Milan et au MSRI. Ce travail est dédié à la mémoire de Robert Coleman, qui en est l'inspirateur.

2. L'espace des poids

2.1. Définition. — Soit $\Lambda = \mathbb{Z}_p[[\mathbb{Z}_p^\times]]$ l'algèbre d'Iwasawa. Nous allons lui associer plusieurs espaces adiques ([**16**], [**15**], [**14**]).

2.1.1. Points analytiques. — Posons $q = 4$ si $p = 2$ ou $q = p$ si $p \neq 2$. On a $\mathbb{Z}_p^\times \simeq \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}^\times \times \exp(q)^{\mathbb{Z}_p}$. On obtient alors un isomorphisme $\Lambda \simeq \mathbb{Z}_p[\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}^\times][[T]]$ en posant $1+T = \exp(q)$ et Λ est complet pour la topologie (p,T)-adique.

Soit $\mathfrak{W} = \mathrm{Spa}(\Lambda, \Lambda)$. C'est l'espace des classes d'équivalences de valuations continues sur Λ, il est équipé d'un faisceau en algèbres topologiques $\mathscr{O}_{\mathfrak{W}}$ et de plus, pour chaque point $x \in \mathfrak{W}$ on dispose d'une valuation v_x sur la fibre $\mathscr{O}_{\mathfrak{W},x}$.

Rappelons que si (A, A^+) est une algèbre affinoide, et si $x \in \mathrm{Spa}(A, A^+)$, on appelle support de x l'idéal premier de A des éléments $a \in A$ tels que $|a|_x = 0$. Suivant [**14**], sect. 3, on dit qu'un point est analytique si son support n'est pas ouvert.

Lemme 2.1. — *Les points non-analytiques de $\mathfrak{W}$ sont en bijection avec* Spf Λ.

Démonstration. Si x est non-analytique, alors $|.|_x$ se factorise en une valuation sur $\Lambda/(p, T)$. Son support est donc un idéal maximal de Λ. Soit $\mathfrak{m}$ un idéal maximal de Λ (qui correspond au choix d'un caractère à valeur dans $\mathbb{F}_p$ de $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}^\times$). On peut lui associer la valuation définie par $v_{\mathfrak{m}}(a) = 0$ si $a \in \mathfrak{m}$, $v_{\mathfrak{m}}(a) = 1$ sinon, qui nous donne la bijection cherchée. □

Définition 2.1. — *Soit $\mathcal{W}$ l'ouvert constitué des points analytiques de $\mathfrak{W}$.*

2.1.2. Description de $\mathcal{W}$. — Comme l'idéal de définition de Λ est engendré par p et T, pour décrire $\mathcal{W}$ on va comparer, pour tout point $|.| \in \mathcal{W}$, les éléments $|p|$ et $|T|$. Pour tout rationnel $\frac{r}{s} \in \mathbb{Q}_{>0}$, on note :

– $\mathcal{W}_{\leq \frac{r}{s}} = \{x \in \mathcal{W}, |T^r|_x \leq |p^s|_x \neq 0\}$,

– $\mathcal{W}_{\geq \frac{r}{s}} = \{x \in \mathcal{W}, |p^s|_x \leq |T^r|_x \neq 0\}$.

On pose également :

– $\mathcal{W}_{\geq 0} = \mathcal{W}_{\leq \infty} = \mathcal{W}$,

– $\mathcal{W}_{\leq 0} = \{x \in \mathcal{W}, |T|_x = 0\}$,

– $\mathcal{W}_{\geq \infty} = \{x \in \mathcal{W}, |p|_x = 0\}$.

Si $I = [a, b] \subset [0, \infty]$ est un intervalle avec $a, b \in \mathbb{Q}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$, on pose $\mathcal{W}_I = \mathcal{W}_{\leq b} \cap \mathcal{W}_{\geq a}$. Si $I \neq \{0\}$ et $I \neq \{\infty\}$, $\mathcal{W}_I$ est un ouvert rationnel. On laisse le soin au lecteur de formuler la définition de $\mathcal{W}_I$ pour un intervalle général $I \subset [0, \infty]$.

Soit $x \in \mathcal{W}$ une valuation de rang 1. On peut définir la valuation p-adique de x par

$$v_p(x) = \frac{\log_p(|T|_x)}{\log_p(|p|_x)} \in [0, \infty].$$

On vérifie alors facilement que $x \in \mathcal{W}_I \Leftrightarrow v_p(x)^{-1} \in I$.

L'espace $\mathcal{W}$ est quasi-compact mais n'est pas affinoide. Cependant, $\mathcal{W}_I$ est affinoide pour tout intervalle fermé à coordonnées rationnelles $I \subsetneq [0, \infty]$. Par exemple, $\mathcal{W} = \mathcal{W}_{[0,1]} \cup \mathcal{W}_{[1,\infty]}$ avec par définition :

$$\mathcal{W}_{[0,1]} = \mathrm{Spa}(\Lambda\langle\frac{T}{p}\rangle[\frac{1}{p}], \Lambda\langle\frac{T}{p}\rangle) \quad \text{et} \quad \mathcal{W}_{[1,\infty]} = \mathrm{Spa}(\Lambda\langle\frac{p}{T}\rangle[\frac{1}{T}], \Lambda\langle\frac{p}{T}\rangle).$$

La topologie sur Λ est la topologie (p, T)-adique. Soit $t \in \mathbb{Q}_{>0}$. La topologie est p-adique dans $\mathscr{O}^+_{\mathcal{W}_{[0,t]}}$ et p est une unité topologiquement nilpotente dans $\mathscr{O}_{\mathcal{W}_{[0,t]}}$. La topologie est T-adique sur $\mathscr{O}^+_{\mathcal{W}_{[t,+\infty]}}$ et T est une unité topologiquement nilpotente dans $\mathscr{O}_{\mathcal{W}_{[t,+\infty]}}$. Sur un intervalle rationnel $[a, b] \subset]0, +\infty[$, les topologies p et T-adiques coïncident sur $\mathscr{O}^+_{\mathcal{W}_{[a,b]}}$ et p, T sont des unités dans $\mathscr{O}_{\mathcal{W}_{[a,b]}}$.

2.1.3. Le bord. — Si $t \in [0, +\infty[$, $\mathcal{W}_{[0,t]}$ est une réunion finie de boules de centre 0 et de rayon $p^{-\frac{1}{t}}$. Posons $\mathcal{W}^{rig} = \mathcal{W}_{[0,+\infty[}$. C'est l'espace adique associé à la fibre générique de Spf Λ au sens de Berthelot ([**4**], sect. 0), et c'est une réunion finie de boules ouvertes de rayon 1. C'est l'espace des poids qui est traditionnellement considéré dans la théorie des familles analytiques de formes surconvergentes. Le bord de l'espace des poids est par définition le fermé $\mathcal{W}_{\{\infty\}} = \mathcal{W} \setminus \mathcal{W}^{rig}$. Tout point $x \in \mathrm{Spec}\ \mathbb{F}_p[\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}^\times]((T))$ correspond à un morphisme

$$\mathbb{F}_p[\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}^\times]((T)) \xrightarrow{x} \mathbb{F}_p((T)).$$

On peut associer à x une valuation v_x sur Λ, obtenue en composant le morphisme de réduction $\Lambda \to \mathbb{F}_p[\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}^\times]((T))$, le morphisme x, et la valuation T-adique sur $\mathbb{F}_p((T))$.

Lemme 2.2. — *Le bord $\mathcal{W}_{\{\infty\}}$ est $\mathrm{Spa}(\mathbb{F}_p[\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}^\times]((T)), \mathbb{F}_p[\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}^\times][[T]])$. C'est l'ensemble des valuations v_x pour $x \in \mathrm{Spec}\ \mathbb{F}_p[\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}^\times]((T))$.*

Démonstration. Par définition, $\mathcal{W}_{\{\infty\}}$ est l'ensemble des points analytiques ayant p dans leur support. Il en résulte aussitôt que c'est $\mathrm{Spa}(\mathbb{F}_p[\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}^\times]((T)), \mathbb{F}_p[\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}^\times][[T]])$, qui est bien l'ensemble fini des valuations v_x. □

2.1.4. Composante libre et composante finie. — On note $\mathcal{W}^0 = \mathrm{Spa}(\mathbb{Z}_p[[T]], \mathbb{Z}_p[[T]])^{an}$. C'est le fermé de $\mathcal{W}$ qui correspond au caractère trivial de $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}^\times$. On note aussi $\mathcal{W}^0_I = \mathcal{W}^0 \cap \mathcal{W}_I$ pour tout intervalle $I \subset [0, +\infty]$. On note $\mathcal{W}^f = \mathrm{Spa}(\mathbb{Z}_p[\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}^\times], \mathbb{Z}_p[\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}^\times])$ l'espace des caractères de $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}^\times$. On a la décomposition

$$\mathcal{W} = \mathcal{W}^0 \times_{\mathrm{Spa}(\mathbb{Z}_p,\mathbb{Z}_p)} \mathcal{W}^f.$$

Si $p \geq 3$, $\mathcal{W}^0$ est la composante connexe de $\mathcal{W}$ qui contient le caractère trivial. Si $p = 2$, $\mathcal{W}$ est connexe !

2.2. Analyticité du caractère universel. — On note $\mathbb{G}_a^+$ le faisceau en anneaux sur la catégorie des espaces adiques définit par $\mathbb{G}_a^+(X) = \mathrm{H}^0(X, \mathscr{O}_X^+)$. On note $\mathbb{G}_m^+$ le sous-faisceau en groupes de $\mathbb{G}_a^+$ des éléments inversibles pour la multiplication.

On dispose du caractère universel $\kappa^{un} \colon \mathbb{Z}_p^\times \to \Lambda^\times$. Ce caractère fournit un accouplement :

$$\mathcal{W} \times \mathbb{Z}_p^\times \to \mathbb{G}_m^+.$$

Si on restreint κ^{un} a certains ouverts de l'espace des poids, alors le caractère devient localement analytique, c'est à dire qu'il se prolonge en un caractère du groupe $\mathbb{Z}_p^\times(1 + p^n\mathbb{G}_a^+) \subset \mathbb{G}_m^+$.

Lemme 2.3. — *Pour tout $n \geq 1$, on a $\kappa^{un}(1+qp^{n-1}\mathbb{Z}_p)-1 \subset (T^{p^{n-1}}, T^{p^{n-2}}p, ..., p^{n-1}T)\Lambda$.*

Démonstration. Rappelons que la valuation p-adique de $C^k_{p^n}$ vaut $n - v_p(k)$. On a donc $\kappa^{un}(\exp(qp^{n-1})) = (1+T)^{p^{n-1}} = \sum_{k=0}^{p^{n-1}} C^k_{p^{n-1}} T^k = 1 \bmod (T^{p^{n-1}}, T^{p^{n-2}}p, ..., p^{n-1}T)$. □

Proposition 2.1. — *Pour tout $n \geq 1$, le caractère universel nous fournit un accouplement :*

$$\mathcal{W}_{[0,p^nq^{-1}]} \times \mathbb{Z}_p^\times(1 + qp^{n-1}\mathbb{G}_a^+) \to \mathbb{G}_m^+$$

qui se restreint en un accouplement :

$$\mathcal{W}_{[0,p^nq^{-1}]} \times (1 + qp^{n-1}\mathbb{G}_a^+) \to 1 + q\mathbb{G}_a^+.$$

Démonstration. Soit (R, R^+) une algèbre affinoide complète et soit $g : \mathrm{Spa}\ (R, R^+) \to \mathcal{W}_{[0,p^nq^{-1}]}$ un morphisme donné par une morphisme $g : (\mathscr{O}_{\mathcal{W}_{[0,p^nq^{-1}]}}, \mathscr{O}^+_{\mathcal{W}_{[0,p^nq^{-1}]}}) \to (R, R^+)$. Il s'agit alors de construire un caractère $\kappa_g : \mathbb{Z}_p^\times(1 + qp^{n-1}R^+) \to (R^+)^\times$. La restriction du caractère à $\mathbb{Z}_p^\times$ est donné par la composition

$$\mathbb{Z}_p^\times \to \Lambda^\times \to \mathscr{O}^{+\times}_{\mathcal{W}_{[0,p^nq^{-1}]}} \to R^{+\times}$$

On a des isomorphismes inverses donnés par l'exponentielle et le logarithme $qp^{n-1}R^+ \simeq 1+qp^{n-1}R^+$. D'autre part, $\kappa^{un}(\exp(q)) = 1+T$ et $\kappa^{un}(\exp(qp^{n-1})) = (1+T)^{p^{n-1}}$. Or, $(1+T)^{p^{n-1}} = 1+qh(T)$ où $h(T) \in \mathscr{O}^+_{\mathcal{W}_{[0,p^nq^{-1}]}}[T]$ d'après le lemme précédent. Posons donc, pour tout $r \in R^+$, $\kappa_f\big(\exp(qp^{n-1}r)\big) = f\Big(\exp\big(r\log(1+qh(T))\big)\Big)$. Le fait que le caractère envoie $1+p^{n-1}q\mathbb{G}_a^+$ dans $1+q\mathbb{G}_a^+$ est évident sur la formule. □

3. Courbes modulaires et tour d'Igusa

3.1. Courbes modulaires formelles et voisinages du lieu ordinaires. — Soit $X \to \mathrm{Spec}\ \mathbb{Z}_p$ la courbe modulaire compactifiée de niveau $N \geq 3$ premier à p. Soit $\mathfrak{X} \to \mathrm{Spf}\ \mathbb{Z}_p$ sa complétion formelle p-adique. Soit E le schéma semi-abélien universel sur $\mathfrak{X}$, et ω_E le faisceau co-normal en la section neutre de E. Soit $\mathrm{Ha} := \mathrm{Ha}(E) \in \mathrm{H}^0(\mathfrak{X}, \omega_E^{p-1} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{F}_p)$ l'invariant de Hasse. Remarquons que Ha^{p^n} se relève canoniquement en une section de $\mathrm{H}^0(\mathfrak{X}, \omega_E^{(p-1)p^n} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$. Soit $\mathrm{Hdg} := \mathrm{Hdg}(E) \subset \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ l'idéal de Hodge (voir le numéro A.1). Soit A_0 un anneau intègre, $\alpha \in A_0$ un élément non nul tel que A_0 soit α-adiquement complet. On suppose aussi que $p \in \alpha A_0$. Remarquons qu'avec ces hypothèses A_0 est canoniquement une $\mathbb{Z}_p$-algèbre.

Soit $\mathfrak{Y}$ le schéma formel sur $\mathrm{Spf}\ A_0$ obtenu en changeant de base $\mathfrak{X}$ de $\mathrm{Spf}\ \mathbb{Z}_p$ à $\mathrm{Spf}\ A_0$. On note $\mathfrak{Y}_{ord}$ l'ouvert lieu ordinaire de $\mathfrak{Y}$, définit par la condition : Ha inversible.

Définition 3.1. — *Pour tout entier $r \in \mathbb{N}$, soit $\mathfrak{Y}_r \to \mathfrak{Y}$ le schéma formel qui représente le foncteur qui à toute A_0-algèbre α-adiquement complète R associe les classes d'équivalences de couples $\big(f : \mathrm{Spf}\ R \to \mathfrak{X}, \eta \in \mathrm{H}^0(\mathrm{Spf}\ R, f^\star\omega^{(1-p)p^{r+1}})\big)$ tels que*

$$\mathrm{Ha}^{p^{r+1}}.\eta = \alpha \mod p^2.$$

Deux couples (f,η) et (f',η') sont équivalents si $f = f'$ et $\eta = \eta'(1+\frac{p^2}{\alpha}u)$ pour un élément $u \in R$.

Lemme 3.1. — *L'idéal de Hodge* Hdg *est localement libre sur $\mathfrak{Y}_r$ et $\alpha \in \mathrm{Hdg}$.*

Démonstration. Localement sur $\mathfrak{Y}_r$, on a $\mathrm{Ha}^{p^{r+1}}\eta = \alpha \mod p^2$. Il en résulte que α et donc p appartiennent à $\mathrm{Hdg}^{p^{r+1}}$. On peut appliquer le lemme A.1 pour conclure à la liberté de Hdg. □

Remarque 3.1. — En fait $\mathfrak{Y}_r$ est un ouvert d'un éclatement admissible de $\mathfrak{Y}$. Soit $\mathrm{Spf}\ B$ un ouvert affine de $\mathfrak{Y}$ sur lequel le faisceau ω_E est trivial. Identifions Ha avec un scalaire et soit $\tilde{\mathrm{Ha}} \in B$ un relèvement de Ha. L'image inverse de $\mathrm{Spf}\ B$ dans $\mathfrak{Y}_r$ vaut $\mathrm{Spf}\ B\langle X\rangle/(\tilde{\mathrm{Ha}}^{p^{r+1}}X - \alpha)$.

Proposition 3.1. — *Soit $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Supposons que $p \in \alpha^{p^k}A_0$. Sur $\mathfrak{Y}_r$ on dispose pour tout $n \leq r+k$ d'un sous-groupe canonique $H_n \hookrightarrow E[p^n]$ qui est localement libre de rang p^n. La réduction de H_n modulo $p\mathrm{Hdg}^{-\frac{p^n-1}{p-1}}$ coincide avec le noyau de Frobenius à la puissance n.*

Démonstration. Voir le corollaire A.2. □

Proposition 3.2. — *L'isogénie "diviser par le sous-groupe canonique" : $E \to E/H_1$, induit un morphisme fini et plat de degré p, $\phi : \mathfrak{Y}_r \to \mathfrak{Y}_{r-1}$ pour tout $r \geq 1$, qui relève le morphisme de Frobenius relatif modulo $p\mathrm{Hdg}^{-1}$.*

Démonstration. Soit (f,η) un R-point de $\mathfrak{Y}_r$. Le morphisme f est donné par un schéma semi-abélien $E \to \mathrm{Spec}\ R$ et une structure de niveau N, notée ψ_N. Soit $E' = E/H_1$ et ψ'_N la structure de niveau N induite sur E'. Au couple (E',ψ'_N) correspond un nouveau morphisme $f' : \mathrm{Spf}\ R \to \mathfrak{Y}$. D'autre part, on a la relation $\mathrm{Ha}(E') = \mathrm{Ha}(E)^p \mod \frac{p}{\mathrm{Hdg}}$. Ici on utilise le fait que $E' = E^{(p)} \mod \frac{p}{\mathrm{Hdg}}$ et donc que $\omega_{E'} \simeq \omega_E^p \mod \frac{p}{\mathrm{Hdg}}$. En élevant à la puissance p^{r-1} on obtient : $\mathrm{Ha}(E')^{p^r} = \mathrm{Ha}(E)^{p^{r+1}} \mod \frac{p^2}{\mathrm{Hdg}}$. Il en résulte que $\mathrm{Ha}(E')^{p^r}\eta = \alpha \mod \frac{p^2}{\mathrm{Hdg}}$. Il existe alors $\tilde{\eta} \in \omega_{E'}^{(p-1)p^r}$ un relèvement de $\eta \mod \frac{p}{\mathrm{Hdg}}$ tel que $\mathrm{Ha}(E')^{p^r}\tilde{\eta} = \alpha \mod p^2$. Le morphisme cherché est donc $(f,\eta) \mapsto (f',\tilde{\eta})$. Le morphisme obtenu relève le Frobenius relatif modulo $\frac{p}{\mathrm{Hdg}}$, qui est un morphisme fini et plat. Comme tous les schémas formels en jeu sont sans A_0-torsion, il en résulte que le morphisme est fini et plat. □

3.2. Tour d'Igusa partielle. — L'existence du sous-groupe canonique permet de construire des revêtements des schémas formels $\mathfrak{Y}_r$.

3.2.1. construction. — On fait à présent l'hypothèse que le schéma formel $\mathfrak{Y}_r$ est excellent, normal, localement le spectre formel d'un quotient d'un anneau régulier. Remarquons que cette hypothèse implique que A_0 est noethérien. Soit $A = A_0[1/\alpha]$ et A^+ le normalisé de A_0 dans A. Au schéma formel $\mathrm{Spf}\ A_0$ on peut associer un espace adique analytique $\mathrm{Spa}(A,A^+)$. Le caractère noethérien de A_0 nous assure que $\mathrm{Spa}(A,A^+)$ est bien un espace adique ([**14**], thm. 2.2).

Nous rappelons la proposition suivante, qui utilise l'excellence. Elle est utile pour définir des schémas formels par normalisation :

Proposition 3.3. — *Soit R un anneau I-adiquement complet, normal, excellent, qui est un quotient d'un anneau régulier. Soit $f \in R$. Alors la complétion I-adique de $R[f^{-1}]$ est normale.*

Démonstration. Voir [**10**], sect. 1.2. □

Au schéma formel $\mathfrak{Y}_r$ on associe l'espace adique analytique $\mathcal{Y}_r = \mathfrak{Y}_r^{ad} \times_{\mathrm{Spa}(A_0,A_0)} \mathrm{Spa}(A,A^+)$ où $\mathfrak{Y}_r^{ad}$ désigne l'adification du schéma formel $\mathfrak{Y}_r$ ([**14**], sect. 4). Soit $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. On suppose que $\alpha^{p^k} \mid p$. Pour tout $n \leq r+k$, on dispose, d'après la proposition 3.1, d'un sous-groupe canonique $H_n \to \mathfrak{Y}_r$ d'échelon n. De plus, le groupe H_n^D est étale au dessus de la fibre analytique $\mathcal{Y}_r$ (grâce au point 6. du corollaire A.2 et au lemme 3.1). Soit $\mathcal{IG}_{n,r} \to \mathcal{Y}_r$ le revêtement fini étale qui paramètre les isomorphismes $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \to H_n^D$. C'est un revêtement galoisien de groupe $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times$ qu'on appelle la tour d'Igusa partielle analytique de niveau n. On définit alors un schéma formel $\mathfrak{IG}_{n,r} \to \mathfrak{Y}_r$ comme la normalisation de $\mathfrak{Y}_r$ dans $\mathcal{IG}_{n,r}$. On appelle $\mathfrak{IG}_{n,r}$ la tour d'Igusa partielle formelle de niveau n.

Lemme 3.2. — *La normalisation $\mathfrak{IG}_{n,r}$ est bien définie. Le morphisme $\mathfrak{IG}_{n,r} \to \mathfrak{Y}_r$ est fini.*

Démonstration. Soit $\mathrm{Spf}\ R$ un ouvert formel de $\mathfrak{Y}_r$. Soit $R'[1/\alpha]$ (la notation est ambigüe pour l'instant car R' n'est pas encore défini) l'anneau de $\mathcal{IG}_{n,r}$ au dessus de $\mathrm{Spa}(R,R)^{an}$. Par hypothèse $R'[1/\alpha]$ est une $R[1/\alpha]$-algèbre finie étale. Soit R' le normalisé de R dans $R[1/\alpha]$. Le caractère excellent de R nous assure que R' est finie sur R. L'ouvert de $\mathfrak{IG}_{n,r}$ au dessus de $\mathrm{Spf}\ R$ est par définition $\mathrm{Spf}\ R'$. Pour voir que la construction a un sens, nous devons montrer que si $f \in R$ alors $R'\langle 1/f\rangle$ est le normalisé de $R\langle 1/f\rangle$ dans $R'[1/\alpha] \otimes_R R\langle 1/f\rangle$ (qui est l'anneau des fonction sur la fibre dans $\mathcal{IG}_{n,r}$ de $\mathrm{Spa}(R\langle 1/f\rangle, R\langle 1/f\rangle)^{an}$). Comme $R\langle 1/f\rangle$ est plat sur R, $R'\langle 1/f\rangle = R' \otimes_R R\langle 1/f\rangle$ est bien un sous-anneau de $R'[1/\alpha] \otimes_R R\langle 1/f\rangle$. Il est normal d'après la proposition 3.3 et fini sur $R\langle 1/f\rangle$. □

Le groupe $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times$ agit sur $\mathfrak{IG}_{n,r}$ à travers son action sur le morphisme $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \to H_n^D$. On possède des morphismes d'oubli évidents $\mathfrak{IG}_{n,r} \to \mathfrak{IG}_{n-1,r}$. Les différentes tours d'Igusa partielles s'organisent en une suite

$$\mathfrak{IG}_{r+k,r} \to \mathfrak{IG}_{r+k-1,r} \to \cdots \to \mathfrak{Y}_r$$

de morphismes finis, équivariants pour l'action de $\mathbb{Z}/p^{r+k}\mathbb{Z}^\times$. Le lemme suivant ne pose pas de problème.

Lemme 3.3. — *Soit $h : \mathfrak{IG}_{n,r} \to \mathfrak{IG}_{n-1,r}$ le morphisme structural. Alors*

$$(h_\star \mathscr{O}_{\mathfrak{IG}_{n,r}})^{1+p^{n-1}\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}} = \mathscr{O}_{\mathfrak{IG}_{n-1,r}}.$$

3.2.2. Ramification de la tour d'Igusa partielle. — Le morphisme $h\colon \mathfrak{IG}_{n,r} \to \mathfrak{IG}_{n-1,r}$ est fini et étale en fibre analytique. Grâce au lemme 3.3, on a donc une trace $\mathrm{Tr}_{\mathfrak{IG}}\colon h_\star\mathscr{O}_{\mathfrak{IG}_{n,r}} \to \mathscr{O}_{\mathfrak{IG}_{n-1,r}}$. La source et le but du morphisme $\mathrm{Tr}_{\mathfrak{IG}}$ dépendent bien sûr de n et de r, mais nous l'omettons de la notation.

Proposition 3.4. — *Pour tout $n \geq 2$, on a*

$$\mathrm{Hdg}^{p^{n-1}} \mathscr{O}_{\mathfrak{IG}_{n-1,r}} \subset \mathrm{Tr}_{\mathfrak{IG}}(h_\star \mathscr{O}_{\mathfrak{IG}_{n,r}}).$$

Pour $n = 1$, $\mathrm{Tr}_{\mathfrak{IG}}(h_\star\mathscr{O}_{\mathfrak{IG}_{1,r}}) = \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}_r}$.

Démonstration. Pour $n = 1$, l'énoncé est clair car le morphisme est de degré $p-1$ premier à p. Soit Spf R un ouvert affine de $\mathfrak{Y}_r$. Supposons que Hdg est trivial sur cet ouvert, engendré par $\tilde{\mathrm{H}}\mathrm{a}$. Soit Spf B_n et Spf B_{n-1} les fibres de H_n^D et H_{n-1}^D au dessus de Spf R. Soit Spf C la fibre du quotient $(H_n/H_{n-1})^D$ sur Spf R. Le morphisme $H_n^D \to H_{n-1}^D$ est un espace homogène sous $(H_n/H_{n-1})^D$ pour la topologie $fppf$. Soit $D_{B_n/B_{n-1}}$ la différente du morphisme $B_{n-1} \to B_n$ et $D_{C/R}$ celle du morphisme $R \to C$. On a l'égalite :

$$D_{B_n/B_{n-1}} \otimes_{B_{n-1}} B_n = D_{C/R} \otimes_R B_n$$

de $B_n \otimes_{B_{n-1}} B_n = C \otimes_R B_n$-modules. Par ailleurs, on a $D_{C/R} = \mathrm{Hdg}^{p^{n-1}} C$ d'après le corollaire A.2 et le lien entre discriminant et différente (voir [**11**], sect. 1 et 2.). Par descente fidèlement plate, il en résulte que $D_{B_n/B_{n-1}} = \mathrm{Hdg}^{p^{n-1}} B_n$. On a un isomorphisme $D^{-1}_{B_n/B_{n-1}} \to \mathrm{Hom}_{B_{n-1}}(B_n, B_{n-1})$ donné par $x \mapsto \mathrm{Tr}_{B_n/B_{n-1}}(x\ \cdot)$. Vérifions que l'idéal $\mathrm{Tr}(D^{-1}_{B_n/B_{n-1}}) \subset B_{n-1}$ est B_{n-1}. La propriété est locale pour la topologie de Zariski sur Spec B_{n-1} donc on peut supposer que B_n est un module libre sur B_{n-1}. On possède donc une application surjective $B_n \to B_{n-1}$ de B_{n-1}-modules qui s'écrit $\mathrm{Tr}(x.)$ pour $x \in D^{-1}_{B_n/B_{n-1}}$ et donc $\mathrm{Tr}(D^{-1}_{B_n/B_{n-1}}) = B_{n-1}$. Par conséquent, on peut trouver un élément $d_n \in B_n$ tel que $\mathrm{Tr}_{B_n/B_{n-1}}(d_n) = \tilde{\mathrm{H}}\mathrm{a}^{p^{n-1}}$. Pour tout $n \geq 1$, on a une immersion ouverte de $\mathcal{Y}_r$-espaces adiques analytiques $\mathcal{IG}_{n,r} \hookrightarrow H_n^D$. De plus, pour tout $n \geq 2$, on a un diagramme cartésien au dessus de $\mathcal{Y}_r$:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{IG}_{n,r} \arrow[r] \arrow[d] & H_n^D \arrow[d] \\ \mathcal{IG}_{n-1,r} \arrow[r] & H_{n-1}^D \end{tikzcd}$$

En utilisant la normalité de $\mathfrak{IG}_{n,r}$ et la finitude de $H_n^D \to \mathfrak{Y}_r$ on obtient un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{IG}_{n,r} \arrow[r] \arrow[d] & H_n^D \arrow[d] \\ \mathfrak{IG}_{n-1,r} \arrow[r] & H_{n-1}^D \end{tikzcd}$$

au dessus de $\mathfrak{Y}_r$. On peut donc tirer les sections d_n en des éléments $d'_n \in \mathscr{O}_{\mathfrak{IG}_{n,r}}(\mathrm{Spf}\ R)$ qui vérifient $\mathrm{Tr}_{\mathfrak{IG}}(d'_n) = \tilde{\mathrm{Ha}}^{p^{n-1}}$. □

Corollaire 3.1. — *Soit* Spf R *un ouvert de* $\mathfrak{Y}_r$ *au dessus duquel le faisceau* Hdg *est trivial, engendré par un élément* $\tilde{\mathrm{Ha}}$. *Il existe alors des éléments* $c_0 = 1$ *et* $c_n \in \tilde{\mathrm{Ha}}^{-\frac{p^n-p}{p-1}}\mathscr{O}_{\mathfrak{IG}_{n,r}}(\mathrm{Spf}\ R)$ *pour tout* $1 \leq n \leq r+k$ *tels que* $\mathrm{Tr}_{\mathfrak{IG}}(c_n) = c_{n-1}$.

Démonstration. On a $c_0 = 1$, $c_1 = \frac{1}{p-1}$. Supposons c_{n-1} construit. D'après la proposition précédente, $\tilde{\mathrm{Ha}}^{\frac{p^{n-1}-p}{p-1}} c_{n-1} \in \tilde{\mathrm{Ha}}^{-p^n}\mathrm{Tr}_{\mathfrak{IG}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{IG}_{n,r}}(\mathrm{Spf}\ R))$. On peut donc trouver c_n qui convient. □

3.2.3. Fonctorialité pour le Frobenius. — On suppose toujours $p \in \alpha^{p^k}A_0$ et $n \leq r+k$. Rappelons qu'on possède un morphisme de Frobenius $\phi : \mathfrak{Y}_{r+1} \to \mathfrak{Y}_r$ (proposition 3.2).

Proposition 3.5. — *On possède un morphisme fini,* $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times$*-équivariant,* $\phi : \mathfrak{IG}_{n,r+1} \to \mathfrak{IG}_{n,r}$*, au dessus du morphisme précédent.*

Démonstration. Commençons par construire un morphisme $\phi : \mathcal{IG}_{n,r+1} \to \mathcal{IG}_{n,r}$. Soit (R, R^+) une algèbre affinoide et $x : \mathrm{Spa}(R, R^+) \to \mathcal{IG}_{n,r+1}$ un point. Soit $E \to R$ le schéma semi-abélien correspondant. Pour tout $m \leq k+r+1$, il possède un sous-groupe canonique H_m d'échelon m ainsi qu'une trivialisation $\psi : \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \to H_n^D$. Soit $E' = E/H_1$ et H'_n le sous-groupe canonique de E' d'échelon n. On a un isomorphisme canonique (qui existe aussi au niveau entier, voir le corollaire A.2) $H'_n \simeq H_{n+1}/H_1$. Par ailleurs, la multiplication par p dans H_{n+1} se factorise en un isomorphisme $H_{n+1}/H_1 \simeq H_n$ (qui n'est pas un isomorphisme entier en général). On possède donc un isomorphisme $H'_n \simeq H_n$ et en composant le dual de cet isomorphisme et ψ, on obtient la trivialisation $\psi' : \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \to (H'_n)^D$. Le morphisme ϕ associe à (E, ψ) le couple (E', ψ'). Par normalisation, le morphisme se prolonge au niveau entier. □

3.3. Application et notation.

— Ce numéro rassemble la plupart des notations utilisées dans l'article.

3.3.1. L'espace des poids. — Soit $I = [p^k, p^{k'}]$ avec $k, k' \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \cup \{+\infty\}$ ou $I = [0, 1]$. On note $B_I = \mathrm{H}^0(\mathcal{W}_I^0, \mathscr{O}^+_{\mathcal{W}^0})$. Explicitons l'anneau B_I (on pourra utiliser le critère de Serre pour vérifier que ces anneaux sont intégralement clos) :

1. Si $k, k' \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $B_I = \mathbb{Z}_p[[T]]\langle u, v\rangle/(T^{p^k}v - p, uv - T^{p^{k'-k}})$,
2. Si $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $k' = +\infty$, $B_I = \mathbb{Z}_p[[T]]\langle u\rangle/(p - uT^{p^k})$,
3. Si $k, k' = +\infty$, $B_I = \mathbb{F}_p[[T]]$,
4. Si $I = [0, 1]$, $B_I = \mathbb{Z}_p[[T]]\langle v\rangle/(T - vp)$.

Soit $\mathfrak{W}_I^0 = \mathrm{Spf}\ B_I$ avec B_I est munit de la topologie (p, T) adique. La fibre analytique de $\mathfrak{W}_I^0$ est $\mathcal{W}_I^0$. On note $\mathfrak{W}_I = \mathrm{Spf}\ B_I[\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}^\times]$. Sa fibre analytique vaut $\mathcal{W}_I$.

3.3.2. Les courbes modulaires. — On rappelle que $\mathfrak{X}$ est la courbe modulaire formelle sur Spf $\mathbb{Z}_p$. Pour tout intervalle rationnel $I \subset [0,\infty]$, on note $\mathcal{X}_I = \mathfrak{X} \times_{\mathrm{Spf}\ \mathbb{Z}_p} \mathcal{W}_I^0$ et $\mathcal{M}_I = \mathfrak{X} \times_{\mathrm{Spf}\ \mathbb{Z}_p} \mathcal{W}_I$. On note $\mathcal{M}_{ord,I}$ (resp. $\mathcal{X}_{ord,I}$) l'ouvert ordinaire de $\mathcal{M}_I$ (resp. $\mathcal{X}_I$) définit par $|\mathrm{Ha}| = 1$.

Pour tout $r \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{M}_{r,I}$ (resp. $\mathcal{X}_{r,I}$) l'ouvert de $\mathcal{M}_I$ (resp. $\mathcal{X}_I$) donné par la condition :

$$|\tilde{\mathrm{Ha}}^{p^{r+1}}| \geq \sup\{|p|,|T|\}$$

où $\tilde{\mathrm{Ha}}$ désigne un relèvement local de l'invariant de Hasse.

Remarque 3.2. — On peut penser à l'ouvert $\mathcal{M}_{r,I}$ comme à une famille de voisinages stricts du lieu ordinaire paramétrée par l'espace $\mathcal{W}$. Sur l'ouvert $\mathcal{M}_{r,[0,\infty[}$ de $\mathcal{M}_{[0,\infty[}$, à mesure qu'on s'approche du bord de l'espace des poids, les voisinages vus pour la topologie p-adique se rétrécissent. Par contre, si on regarde les voisinages pour la topologie T-adique au voisinage du bord de l'espace des poids, ils ont un rayon constant !

Pour tout intervalle I comme dans le paragraphe précédent, on note $\mathfrak{X}_I = \mathfrak{X} \times_{\mathrm{Spf}\ \mathbb{Z}_p} \mathfrak{W}_I^0$ et $\mathfrak{M}_I = \mathfrak{X} \times_{\mathrm{Spf}\ \mathbb{Z}_p} \mathfrak{W}_I$. On applique la construction du paragraphe 3.1 avec $A_0 = B_I$ et $\alpha = T$ dans les cas où $I = [p^k, p^{k'}]$ avec $k \geq 0$, et avec $\alpha = p$ si $I = [0,1]$. On note $\mathfrak{X}_{r,I} := \mathfrak{Y}_r$ pour ces choix. C'est donc un ouvert d'un éclaté de $\mathfrak{X}_I$. On remarque que $\mathcal{X}_{r,I}$ est l'espace adique fibre analytique de $\mathfrak{X}_{r,I}$. On note $\mathfrak{M}_{r,I} = \mathfrak{X}_{r,I} \times_{\mathfrak{W}_I^0} \mathfrak{W}_I$, et on observe que $\mathcal{M}_{r,I}$ est sa fibre analytique.

Proposition 3.6. — *Pour tout $n \leq r+k$, on possède un sous-groupe canonique H_n d'ordre n sur $\mathfrak{X}_{r,I}$ et $\mathfrak{M}_{r,I}$. L'isogénie $E \to E/H_1$ nous fournit des morphismes finis et plats de Frobenius relatif :*

$$\phi : \mathfrak{X}_{r+1,I} \to \mathfrak{X}_{r,I} \quad et \quad \phi : \mathfrak{M}_{r+1,I} \to \mathfrak{M}_{r,I}.$$

Démonstration. Cela résulte des propositions 3.1 et 3.2. □

3.3.3. La tour d'Igusa. — On vérifie grâce au théorème principal de [**25**] et à la remarque 3.1 que $\mathfrak{X}_{r,I}$ est excellent, localement le spectre formel d'un quotient d'un anneaux régulier. Vérifions qu'il est normal.

Lemme 3.4. — *Le schéma formel $\mathfrak{X}_{r,I}$ est normal.*

Démonstration. Traitons simplement le cas où $I = [p^k, p^{k'}]$. Les autres cas sont similaires. Soit Spf A un ouvert de la courbe modulaire sur Spf $\mathbb{Z}_p$. Supposons que ω_E est trivial sur A et soit $\tilde{\mathrm{Ha}} \in A$ un relèvement de l'invariant de Hasse vu comme un scalaire. Soit

$$B = A[[T]]\langle u,v,w\rangle/(T^{p^k}v - p, uv - T^{p^{k'-k}}, \tilde{\mathrm{Ha}}^{p^{r+1}}w - T).$$

Alors Spf B est l'image inverse de Spf A dans $\mathfrak{X}_{r,I}$. Pour vérifier qu'il est normal, appliquons le critère de Serre. On voit facilement que B est un intersection complète dans $A[[T]]\langle u,v,w\rangle$ donc il est Cohen-Macaulay. Vérifions que B est régulier en codimension 1. Soit $x \in$ Spec B de codimension 1. Si $T \notin x$ alors $x \in$ Spec $B[1/T]$ et $B[1/T]$ est formellement lisse (car c'est l'anneau des fonctions sur la fibre rigide de Spf B qui est lisse). Si $T \in x$ alors x est un point générique de $B/TB = (A/p[u,v,w])/(uv, \tilde{\mathrm{Ha}}^{p^{r+1}}w)$. Comme ce dernier anneau est réduit, il en résulte que B_x/TB_x est un corps et donc B_x est régulier. □

On dispose sur $\mathfrak{X}_{r,I}$ d'un sous-groupe canonique d'échelon $n \leq k+r$ dès que $I \subset [p^k,\infty]$. On peut alors définir la tour d'Igusa partielle formelle de niveau n grâce au numéro 3.2, $\mathfrak{IG}_{n,r,I} \to \mathfrak{X}_{r,I}$. On note $\mathcal{IG}_{n,r,I}$ l'espace adique fibre analytique de $\mathfrak{IG}_{n,r,I}$. C'est la tour d'Igusa partielle analytique de niveau n.

4. Formes modulaires surconvergentes en caractéristique p

Dans cette partie, nous construisons des espaces de formes surconvergentes en caractéristique p.

4.1. Courbe modulaire en caractéristique p. — Soit $\bar{X} \to \operatorname{Spec} \mathbb{F}_p$ la courbe modulaire compactifiée de niveau N premier à p, soit Ha l'invariant de Hasse et Hdg l'idéal de Hodge. Soit $\bar{X}_{ord}$ l'ouvert ordinaire. On rappelle que $\mathfrak{W}^0_{\{\infty\}} = \operatorname{Spf} \mathbb{F}_p[[T]]$. On note $\bar{\kappa} : \mathbb{Z}_p^\times \to \mathbb{F}_p[[T]]^\times$ le caractère qui est trivial sur $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}^\times$ et qui envoie $\exp(q)$ sur $1+T$. Pour tout caractère $\chi : \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}^\times \to \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}^\times$, on note $\bar{\chi}$ sa réduction modulo $\mathfrak{m}_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}}$ et $\bar{\kappa}_\chi$ le caractère $\bar{\kappa} \otimes \bar{\chi}$.

Soit $\mathfrak{X}_{\{\infty\}} = \bar{X} \times_{\operatorname{Spec} \mathbb{F}_p} \mathfrak{W}^0_{\{\infty\}}$ et $\mathfrak{X}_{ord,\{\infty\}} = \bar{X}_{ord} \times_{\operatorname{Spec} \mathbb{F}_p} \mathfrak{W}^0_{\{\infty\}}$ On a construit (voir les numéros 3.1 et 3.3) un schéma formel $\mathfrak{X}_{r,\{\infty\}} \to \mathfrak{X}_{\{\infty\}}$ pour tout entier $r \geq 0$. Soit $\mathcal{X}_{\{\infty\}}$, $\mathcal{X}_{r,\{\infty\}}$ les espaces adiques sur $\mathcal{W}^0_{\{\infty\}} = \operatorname{Spa}(\mathbb{F}_p((T)), \mathbb{F}_p[[T]])$, fibres génériques de $\mathfrak{X}_{\{\infty\}}$ et $\mathcal{X}_{r,\{\infty\}}$. Ainsi, $\mathcal{X}_{r,\{\infty\}}$ est l'ouvert de $\mathcal{X}_{\{\infty\}}$ d'équation $|\mathrm{Ha}^{p^{r+1}}| \geq |T|$.

Comme on est en caractéristique p, on dispose sur tous ces espaces, pour tout $n \geq 0$, d'un sous-groupe canonique H_n d'ordre n. C'est le noyau de l'isogénie de Frobenius itérée n fois : $F^n : E \to E^{(p^n)}$.

La règle qui associe à E son quotient E/H_1 nous fournit des morphismes Frobenius relatif $\mathfrak{X}_{\{\infty\}} \to \mathfrak{X}_{\{\infty\}}$, $\mathfrak{X}_{ord,\{\infty\}} \to \mathfrak{X}_{ord,\{\infty\}}$ et pour tout $r \geq 0$, $\mathfrak{X}_{r+1,\{\infty\}} \to \mathfrak{X}_{r,\{\infty\}}$. Les morphismes de Frobenius relatif sont tous notés ϕ afin de simplifier les notations.

4.2. L'équivalence de Katz. — Soit $\bar{IG}_{n,ord} \to \bar{X}_{ord}$ l'espace de modules des trivialisations de H_n^D. C'est un revêtement étale de $\bar{X}_{ord}$ de groupe $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times$. Soit $\bar{IG}_{\infty,ord} = \lim_n \bar{IG}_{n,ord}$ le schéma obtenu en passant à la limite projective. Soit $\bar{x}$ un point géométrique de $\bar{X}_{ord}$ et $\rho : \Pi_1(\bar{X}_{ord}, \bar{x}) \to \mathbb{Z}_p^\times$ la représentation de monodromie sur $\bar{IG}_{\infty,ord}|_{\bar{x}}$. Pour tout caractère $\bar{\kappa}_\chi : \mathbb{Z}_p^\times \to \mathbb{F}_p[[T]]^\times$, on possède, d'après [**17**], un ϕ-module étale $\mathfrak{w}^{\bar{\kappa}_\chi}$ associé à $\bar{\kappa}_\chi \circ \rho$ dont voici la construction.

Pour tout $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$, soit $\mathfrak{IG}_{n,ord,\{\infty\}}$ le produit fibré : $\bar{IG}_{n,ord} \times_{\operatorname{Spec} \mathbb{F}_p} \mathfrak{W}^0_{\{\infty\}}$. On pose $\mathfrak{w}^{\bar{\kappa}_\chi} := \mathscr{O}_{\mathfrak{IG}_{\infty,ord,\{\infty\}}}[\bar{\kappa}_\chi^{-1}]$. C'est un faisceau inversible de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{ord,\{\infty\}}}$-modules. De plus, le Frobenius relatif de $\mathfrak{IG}_{\infty,ord,\{\infty\}}$ induit un isomorphisme $\phi^\star \mathfrak{w}^{\bar{\kappa}_\chi} \simeq \mathfrak{w}^{\bar{\kappa}_\chi}$.

4.3. Tour d'Igusa surconvergente. — Soit $\mathfrak{IG}_{n,r,\{\infty\}} \to \mathfrak{X}_{r,\{\infty\}}$ la tour d'Igusa partielle. On a des morphismes de transition finis : $\mathfrak{IG}_{n,r,\{\infty\}} \to \mathfrak{IG}_{n-1,r,\{\infty\}}$. Soit $\mathfrak{IG}_{\infty,r,\{\infty\}}$ la limite projective de ces morphismes dans la catégorie des schémas formels T-adiques. Nous allons donner une description simple et une interprétation modulaire de ces tours d'Igusa.

Soit $\bar{IG}_n$ la normalisation de $\bar{X}$ and $\bar{IG}_{n,ord}$. La proposition suivante donne une interprétation modulaire de $\bar{IG}_n$.

Proposition 4.1. — *Soit R une $\mathbb{F}_p$-algèbre normale. Soit $x \in \bar{X}(R)$ correspondant à schéma semi-abélien E/R d'invariant de Hasse non-nul. Alors $\bar{IG}_n|_x(R)$ est l'ensemble des morphismes de schémas en groupes $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \to H_n^D$ qui sont des isomorphismes au dessus de* Spec $R[1/Ha]$.

Démonstration. C'est évident. □

Soit alors $\bar{\mathfrak{IG}}_{n,r}$ le produit fibré : $\bar{IG}_n \times_{\bar{X}} \mathfrak{X}_{r,\{\infty\}}$.

Lemme 4.1. — *On possède un isomorphisme canonique $\bar{\mathfrak{IG}}_{n,r} \simeq \mathfrak{IG}_{n,r,\{\infty\}}$.*

Démonstration. Les schémas formels $\bar{\mathfrak{IG}}_{n,r}$ et $\mathfrak{IG}_{n,r,\{\infty\}}$ sont finis sur $\mathfrak{X}_{r,\{\infty\}}$ et ils ont clairement même fibre générique $\mathcal{IG}_{n,r,\{\infty\}}$. Il suffit donc de voir que $\bar{\mathfrak{IG}}_{n,r}$ est normale. Si Spec A est un ouvert affine de $\bar{X}$, Spec A_n l'ouvert affine de $\bar{IG}_n$ au dessus, alors le tube de Spec A dans $\bar{\mathfrak{IG}}_{n,r}$ est Spf $A_n[[T]]\langle T/\mathrm{Ha}^{p^{r+1}}\rangle$. L'anneau A_n est régulier et le morphisme $A_n \to A_n[[T]]\langle T/\mathrm{Ha}^{p^{r+1}}\rangle$ est régulier, donc $A_n[[T]]\langle T/\mathrm{Ha}^{p^{r+1}}\rangle$ est régulier et donc normal. □

On déduit alors la proposition suivante :

Proposition 4.2. — 1. *Pour tout $\mathbb{F}_p[[T]]$-algèbre R normale, plate, T-adiquement complète, $\mathfrak{IG}_{n,r,\{\infty\}}(R)$ est l'ensemble des classes d'isomorphismes de triplets (x, η, ψ_n) où $x \in \bar{X}(R)$ correspond à un schéma semi-abélien E/R, $\eta \in \omega_E^{-(p-1)p^{r+1}}$ vérifie $Ha^{p^{r+1}}\eta = T$ et $\psi_n : (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \to H_n^D$ est un morphisme qui est un isomorphisme au dessus de* Spec $R[1/\mathrm{Ha}]$.

2. *Pour tout $\mathbb{F}_p[[T]]$-algèbre R normale, plate, T-adiquement complète, $\mathfrak{IG}_{\infty,r,\{\infty\}}(R)$ est l'ensemble des classes d'isomorphismes de triplets (x, η, ψ) où (x, η) sont comme au dessus et $\psi : \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \simeq \mathrm{colim}\ H_n^D$ est un morphisme qui est un ismomorphisme au dessus de* Spec $R[1/\mathrm{Ha}]$.

4.4. Surconvergence de l'équivalence de Katz. — Dans ce numéro, nous allons montrer que la construction de Katz garde un sens dans un voisinage du lieu ordinaire et qu'elle fournit les bons objets.

4.4.1. Le faisceau $\mathfrak{w}_{\{\infty\}}$. — Le but de ce paragraphe est de montrer que le faisceau $\mathfrak{w}^{\bar{\kappa}_\chi}$ peut se réaliser sur $\mathfrak{X}_{r,\{\infty\}}$ au lieu de $\mathfrak{X}_{ord,\{\infty\}}$. Commençons par un lemme sur la ramification du morphisme $h_{n+1} : \bar{IG}_{n+1} \to \bar{IG}_n$ (avec la convention $\bar{IG}_0 = \bar{X}$). Notons $\mathrm{Tr}_{IG} : (h_{n+1})_\star\mathscr{O}_{\bar{IG}_{n+1}} \to \mathscr{O}_{\bar{IG}_n}$ la trace de ce morphisme. La source et le but du morphisme Tr_{IG} dépendent de n, mais on l'omet de la notation pour simplifier.

Lemme 4.2. — *On a* $\mathrm{Tr}_{IG}\big((h_1) \star \mathscr{O}_{\bar{IG}_1}\big) = \mathscr{O}_{\bar{X}}$ *et pour tout $n \geq 1$, on a* $\mathrm{Hdg}^{p^n} \subset \mathrm{Tr}_{IG}\big((h_{n+1}) \star \mathscr{O}_{\bar{IG}_{n+1}}\big)$.

Démonstration. C'est analogue (en plus simple) à la démonstration de la proposition 3.4. □

Corollaire 4.1. — *Soit* Spec A *un ouvert de $\bar{X}$ sur lequel le faisceau* Hdg *est trivial. Identifions l'invariant de Hasse* Ha *avec un générateur de ce faisceau. Alors il existe une suite d'éléments $c_0 = 1$, $c_n \in \mathrm{Ha}^{-\frac{p^n-p}{p-1}}\mathscr{O}_{\bar{IG}_n}(\mathrm{Spec}\ A)$ pour $n \geq 1$ tels que $\mathrm{Tr}_{IG}(c_n) = c_{n-1}$.*

Définissons alors $\mathfrak{w}_{\{\infty\}}$ comme le sous-faisceau de $\mathscr{O}_{\mathfrak{IG}_{\infty,r,\{\infty\}}}$ des fonctions $\bar{\kappa}^{-1}$-variantes pour l'action de $\mathbb{Z}_p^\times$.

Théorème 4.1. — *Le faisceau $\mathfrak{w}_{\{\infty\}}$ est un faisceau inversible sur $\mathfrak{X}_{r,\{\infty\}}$ pour $r \geq 2$ (resp. $r \geq 3$ si $p = 2$).*

Démonstration. On peut travailler localement pour la topologie de Zariski sur $\mathfrak{X}_{r,\{\infty\}}$. Soit donc Spec A un ouvert de $\bar{X}$, supposons ω_E libre sur Spec A et identifions l'invariant de Hasse Ha avec un scalaire. Soit Spec A_n l'image inverse de Spec A dans $\bar{IG}_n$, Spf $A_n[[T]]\langle T/\mathrm{Ha}^{p^{r+1}}\rangle$ l'ouvert correspondant dans $\mathfrak{IG}_{n,r,\{\infty\}}$ et Spf $A_\infty[[T]]\langle T/Ha^{p^{r+1}}\rangle$ l'ouvert correspondant dans $\mathfrak{IG}_{\infty,r,\{\infty\}}$. On a noté $A_\infty = \mathrm{colim}_n A_n$.

Comme $(A_n)^{(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times} = A$, $(A_\infty)^{\mathbb{Z}_p^\times} = A$ et donc $(A_\infty[[T]]\langle T/Ha^{p^k}\rangle)^{(\mathbb{Z}_p)^\times} = A[[T]]\langle T/Ha^{p^{r+1}}\rangle$. Pour démontrer le théorème, il suffit donc de trouver un élément inversible $x \in A_\infty[[T]]\langle T/Ha^{p^{r+1}}\rangle$ tel que $\sigma(x) = \bar{\kappa}^{-1}(\sigma).x$ pour tout $\sigma \in \mathbb{Z}_p^\times$.

D'après le corollaire 4.1, il existe des éléments $c_0 = 1$, $c_1 = \frac{1}{p-1}$, $c_n \in \mathrm{Ha}^{-\frac{p^n-p}{p-1}} A_n$ vérifiant $Tr_{A_n/A_{n-1}}(c_n) = c_{n-1}$.

Définissons alors $b_0 = 1$ et $b_n = \sum_{\sigma \in (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times} \bar{\kappa}(\tilde{\sigma})\sigma(c_n) \in \mathrm{Ha}^{-\frac{p^n-p}{p-1}} A_n[[T]]$ pour tout $n \geq 1$, où $\tilde{\sigma} \in \mathbb{Z}_p^\times$ est un relèvement de $\sigma \in (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times$. Soit $\tilde{\sigma}'$ un autre choix de relèvements de σ donnant un autre élément b'_n. Grace au lemme 2.3, on voit facilement que :

- $b_n = b'_n \mod T^{p^{n-1}}\mathrm{Ha}^{-\frac{p^n-p}{p-1}}$ si $n \geq 1$ et $p \geq 3$,
- $b_n = b'_n \mod T^{p^{n-2}}\mathrm{Ha}^{-\frac{p^n-p}{p-1}}$ si $n \geq 2$ et $p = 2$,
- $b_n = b'_n \mod T$ si $n = 1$ et $p \geq 3$.

On vérifie également que :

- $b_n - b_{n-1} \in T^{p^{n-2}}\mathrm{Ha}^{-\frac{p^n-p}{p-1}} A_n[[T]]$ si $n \geq 2$ et $p \geq 3$ ou $n = 2$ et $p = 2$,
- $b_n - b_{n-1} \in T^{p^{n-3}}\mathrm{Ha}^{-\frac{p^n-p}{p-1}} A_n[[T]]$ si $n \geq 3$ et $p = 2$,
- $b_1 - 1 \in TA[[T]]$.

Indiquons la démonstration dans le cas $n \geq 2$ et $p \neq 2$, les autres cas sont analogues. On a

$$\begin{aligned} b_n &= \sum_{\sigma \in (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times} \bar{\kappa}(\tilde{\sigma})\sigma.c_n \\ &= \sum_{\tau \in (\mathbb{Z}/p^{n-1}\mathbb{Z})^\times} \bar{\kappa}(\tilde{\tau}).\tilde{\tau}\big(\sum_{\sigma \in 1+p^{n-1}\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}} \bar{\kappa}(\tilde{\sigma})\sigma.c_n\big) \\ &= \sum_{\tau \in (\mathbb{Z}/p^{n-1}\mathbb{Z})^\times} \bar{\kappa}(\tilde{\tau}).\tilde{\tau}\big(c_{n-1} + \sum_{\sigma \in 1+p^{n-1}\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}} (\bar{\kappa}(\tilde{\sigma})-1)\sigma.c_n\big) \end{aligned}$$

Et donc

$$b_n - b_{n-1} = \sum_{\tau \in (\mathbb{Z}/p^{n-1}\mathbb{Z})^\times} \bar{\kappa}(\tilde{\tau})\tau.c_{n-1} - b_{n-1} + \sum_{\tau \in (\mathbb{Z}/p^{n-1}\mathbb{Z})^\times} \bar{\kappa}(\tilde{\tau}).\tilde{\tau}\big(\sum_{\sigma \in 1+p^{n-1}\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}} (\bar{\kappa}(\tilde{\sigma})-1)\sigma.c_n\big).$$

Si $\sigma \in 1 + p^{n-1}\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$, alors $\bar{\kappa}(\tilde{\sigma}) - 1 \in T^{p^{n-2}}\mathbb{F}_p[[T]]$ et donc,

$$\sum_{\tau \in (\mathbb{Z}/p^{n-1}\mathbb{Z})^\times} \bar{\kappa}(\tilde{\tau}).\tilde{\tau}\big(\sum_{\sigma \in 1+p^{n-1}\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}} (\bar{\kappa}(\tilde{\sigma})-1)\sigma.c_n\big) \in T^{p^{n-2}}\mathrm{Ha}^{-\frac{p^n-p}{p-1}} A_n[[T]].$$

D'autre part, $\sum_{\tau \in (\mathbb{Z}/p^{n-1}\mathbb{Z})^\times} \bar{\kappa}(\tilde{\tau})\tau.c_{n-1} - b_{n-1} \in T^{p^{n-2}}\mathrm{Ha}^{-\frac{p^{n-1}-p}{p-1}} A_n[[T]]$.

Par récurrence, on vérifie ensuite que $b_n \in A_\infty[[T/\mathrm{Ha}^{p^2}]]$ (resp. $A_\infty[[T/\mathrm{Ha}^{p^3}]]$ si $p = 2$) et que la suite b_n converge vers un élément b_∞ pour la topologie (T/Ha^{p^2})-adique (resp. (T/Ha^{p^3})-adique si $p = 2$). On a une inclusion continue $A_\infty[[T/\mathrm{Ha}^{p^2}]] \subset A_\infty[[T]]\langle T/\mathrm{Ha}^{p^3}\rangle$ car

$$\frac{T^{p^{n-2}}}{\mathrm{Ha}^{p^n}} = T^{p^{n-3}(p-1)}\big(\frac{T}{\mathrm{Ha}^{p^3}}\big)^{p^{n-3}}.$$

Il en résulte que $b_\infty \in A_\infty[[T]]\langle T/Ha^{p^3}\rangle$ (resp. $b_\infty \in A_\infty[[T]]\langle T/Ha^{p^4}\rangle$ si $p = 2$). Par construction, $\sigma.b_\infty = \bar{\kappa}^{-1}(\sigma).b_\infty$. Enfin, $b_\infty - 1 \in \frac{T}{\mathrm{Ha}^{p^3}} A_\infty[[T]]\langle T/\mathrm{Ha}^{p^3}\rangle$ (resp.$b_\infty - 1 \in \frac{T}{\mathrm{Ha}^{p^4}} A_\infty[[T]]\langle T/\mathrm{Ha}^{p^4}\rangle$ si $p = 2$. Comme $\frac{T}{\mathrm{Ha}^{p^3}}$ (resp. $\frac{T}{\mathrm{Ha}^{p^4}}$ si $p = 2$) est topologiquement nilpotent, il en résulte que b_∞ est inversible. □

4.4.2. Le faisceau des formes de poids $\bar{\kappa}_\chi$. — Soit $\chi : \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}^\times \to \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}^\times$ un caractère et $\bar{\kappa}_\chi : \mathbb{Z}_p^\times \to \mathbb{F}_p[[T]]^\times$ désigne le caractère que envoie $\exp(q)$ sur $1+T$ et qui vaut la réduction modulo $\mathfrak{m}_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}}$ de $\bar{\chi}$ de χ sur $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}^\times$. Supposons $p \neq 2$ pour un instant. Soit $h_1 : \bar{IG}_1 \to X$. Soit $\bar{\omega}^{\bar{\chi}} := (h_1)_\star \mathcal{O}_{\bar{IG}_1}[\bar{\chi}^{-1}]$ le faisceau cohérent sur $\bar{X}$.

Lemme 4.3. — *Le faisceau $\bar{\omega}^{\bar{\chi}}$ est inversible.*

Démonstration. Le faisceau $\bar{\omega}^{\bar{\chi}}$ est cohérent et sans torsion donc projectif. On calcul son rang sur le lieu ordinaire, et il vaut évidemment 1. □

Si $p = 2$, alors le caractère résiduel $\bar{\chi}$ est trivial et $\bar{\omega}^{\bar{\chi}}$ est, par définition, le faisceau trivial.

On note $\mathfrak{w}^{\bar{\chi}}$ l'image inverse de $\bar{\omega}^{\bar{\chi}}$ sur $\mathfrak{X}_{r,\{\infty\}}$ pour tout r. On pose alors $\mathfrak{w}_r^{\bar{\kappa}_\chi} = \mathfrak{w}_{\{\infty\}} \otimes \mathfrak{w}^{\bar{\chi}}$.

4.4.3. Fonctorialité à la restriction. — Soit $r' \geq r \geq 2$ (resp $r \geq 3$ si $p = 2$). On a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{IG}_{\infty,r',\{\infty\}} & \longrightarrow & \mathfrak{IG}_{\infty,r,\{\infty\}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathfrak{X}_{r',\{\infty\}} & \xrightarrow{i} & \mathfrak{X}_{r,\{\infty\}} \end{array}$$

qui induit des immersions ouvertes sur la fibre générique. Le morphisme $\mathfrak{IG}_{\infty,r',\{\infty\}} \to \mathfrak{IG}_{\infty,r,\{\infty\}}$ est équivariant sous l'action du groupe $\mathbb{Z}_p^\times$. Par conséquent, on dispose d'un morphisme canonique $i^\star \mathfrak{w}_r^{\bar{\kappa}_\chi} \to \mathfrak{w}_{r'}^{\bar{\kappa}_\chi}$.

Proposition 4.3. — *Le morphisme précédent est un isomorphisme.*

Démonstration. Tensorisons le morphisme $i^\star \mathfrak{w}_r^{\bar{\kappa}_\chi} \to \mathfrak{w}_{r'}^{\bar{\kappa}_\chi}$ par $(i^\star \mathfrak{w}_r^{\bar{\kappa}_\chi})^{-1}$. Le faisceau $(i^\star \mathfrak{w}_r^{\bar{\kappa}_\chi})^{-1} \otimes \mathfrak{w}_{r'}^{\bar{\kappa}_\chi}$ s'identifie au sous-faisceau de $\mathscr{O}_{\mathfrak{IG}_{\infty,r',\{\infty\}}}$ des sections invariantes sous $\mathbb{Z}_p^\times$, lequel est égal à $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{r',\{\infty\}}}$. □

Dorénavant, on note $\mathfrak{w}^{\bar{\kappa}_\chi}$ au lieu de $\mathfrak{w}_r^{\bar{\kappa}_\chi}$.

4.4.4. Fonctorialité pour le Frobenius. — Soit E le schéma semi-abélien universel sur $\bar{X}$. On dispose aussi d'un morphisme de Frobenius $F : E \to E/H_1 = E^{(p)}$. Ce morphisme induit des injections $F^D : H_n(E')^D \to H_{n+1}(E)^D$ puis un morphisme injectif $F^D : \mathrm{colim}_n H_n(E')^D \to \mathrm{colim}_n H_n(E)^D$ qui est un isomorphisme sur le lieu ordinaire. On en déduit une application : $\phi : \mathfrak{X}_{r+1,\{\infty\}} \to \mathfrak{X}_{r,\{\infty\}}$ que l'on peut étendre en une application $\phi : \mathfrak{IG}_{\infty,r+1,\{\infty\}} \to \mathfrak{IG}_{\infty,r,\{\infty\}}$, donnée par la règle suivante : A tout morphisme $\psi : \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \to \mathrm{colim}_n H_n(E)^D$, on associe le morphisme ψ' définit sur le lieu ordinaire par $(F^D)^{-1} \circ \psi : \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \to \mathrm{colim}_n H_n(E')^D$ et qui se prolonge partout par normalité. Si $i : \mathfrak{X}_{r+1,\{\infty\}} \to \mathfrak{X}_{r,\{\infty\}}$ désigne le morphisme de la section précédente, alors on a un morphisme canonique $i^\star \mathfrak{w}^{\bar{\kappa}_\chi} \to \phi^\star \mathfrak{w}^{\bar{\kappa}_\chi}$.

Proposition 4.4. — *Le morphisme $i^\star \mathfrak{w}^{\bar{\kappa}_\chi} \to \phi^\star \mathfrak{w}^{\bar{\kappa}_\chi}$ est un isomorphisme.*

Démonstration. Similaire à la démonstration précédente. □

4.4.5. Définitions. — On peut maintenant définir les espaces de formes surconvergentes.

Définition 4.1. — *Une forme r-surconvergente entière de poids $\bar{\kappa}_\chi$ est une section globale du faisceau inversible $\mathfrak{w}^{\bar{\kappa}_\chi}$.*

On note $\omega^{\bar{\kappa}_\chi}$ le faisceau inversible sur $\mathcal{X}_{r,\{\infty\}}$ fibre générique de $\mathfrak{w}^{\bar{\kappa}_\chi}$. Une forme surconvergente de poids $\bar{\kappa}_\chi$ est une section de $\omega^{\bar{\kappa}_\chi}$ sur $\mathcal{X}_{ord,\{\infty\}}$ qui surconverge sur un voisinage $\mathcal{X}_{r,\{\infty\}}$. On note $M^\dagger_{\bar{\kappa}_\chi}$ le $\mathbb{F}_p((T))$-espace des formes surconvergentes de poids $\bar{\kappa}_\chi$. C'est une limite inductive compact d'espaces de Banach.

4.4.6. Description modulaire. — Une forme r-surconvergente entière f de poids $\bar{\kappa}_\chi$ est un loi fonctorielle qui à

1. une $\mathbb{F}_p[[T]]$-algèbre T-adiquement complète, normale, plate R,
2. $x \in X(R)$ correspondant à schéma semi-abélien E/R et une structure de niveau N,
3. $\eta \in \omega_E^{-(p-1)p^{r+1}}$ qui vérifie $\mathrm{Ha}^{p^{r+1}}\eta = T$,
4. une trivialisation $\psi : \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \simeq \mathrm{colim}_n H_n^D|_{R[1/\mathrm{Ha}]}$,

associe un élément de $f(x,\eta,\psi) \in R$ tel que $f(x,\eta,\sigma.\psi) = \bar{\kappa}_\chi^{-1}(\sigma)f(x,\eta,\psi)$ pour tout $\sigma \in \mathbb{Z}_p^\times$.

4.4.7. Opérateur U_p. — On verra dans la proposition 6.2 qu'on peut définir un morphisme $p^{-1}\mathrm{Tr}_\phi : \phi_\star\mathscr{O}_{\mathcal{X}_{r+1,\{\infty\}}} \to \mathscr{O}_{\mathcal{X}_{r,\{\infty\}}}$. On définit alors l'opérateur U_p par la règle :

$$U_p : \mathrm{H}^0(\mathcal{X}_r, \omega^{\bar{\kappa}_\chi}) \to \mathrm{H}^0(\mathcal{X}_{r+1}, i^\star\omega^{\bar{\kappa}_\chi}) \simeq \mathrm{H}^0(\mathcal{X}_{r+1}, \phi^\star\omega^{\bar{\kappa}_\chi}) \xrightarrow{p^{-1}\mathrm{Tr}_\phi} \mathrm{H}^0(\mathcal{X}_r, \omega^{\bar{\kappa}_\chi}).$$

Cet opérateur est compact et il possède donc une série caractéristique.

4.4.8. Action du reste de l'algèbre de Hecke. — L'action de l'algèbre de Hecke hors p peut être définie sans problème, de façon géométrique, comme dans le cas des espaces de formes modulaires classiques.

5. Intégralité de la famille universelle de faisceaux sur l'espace $\mathcal{W}_{[0,\infty[}$

L'objectif de cette section est de construire une famille de faisceaux modulaires sur l'espace adique $\mathcal{W}_{[0,\infty[}$, ainsi que des modèles entiers. La famille de faisceaux sur $\mathcal{W}_{[0,\infty[}$ a été construite dans [**1**] et [**21**]. La nouveauté ici est que nous construisons des modèles entiers inversibles canoniques pour ces faisceaux .

5.1. Résultats principaux. — On renvoie au numéro 3.3 pour la définition des objets considérés. Dans cette partie, $I = [0,1]$ ou $[p^k, p^{k'}]$ pour $k, k' \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Si $I = [0,1]$, on pose $k = k' = 0$ pour avoir des notations uniformes.

5.1.1. En géométrie formelle. — Le résultat principal de cette partie est le suivant. Sa démonstration fait l'objet des numéros 5.2, 5.3 et 5.4.

Théorème 5.1. — *Supposons $r \geq 1$ et $r + k \geq k' + 2$ (resp. $r \geq 2$ et $r + k \geq k' + 4$ si $p = 2$). Alors on possède un faisceau inversible $\mathfrak{w}_I$ sur $\mathfrak{X}_{r,I}$. Ce faisceau jouit des propriétés suivantes :*

1. *Soit $\mathcal{X}_{r,I}$ l'espace adique sur $\mathbb{Q}_p$ fibre générique de $\mathfrak{X}_{r,I}$. Le faisceau fibre générique de $\mathfrak{w}_I$ est le faisceau des familles de formes surconvergentes sur $\mathcal{X}_{r,I}$ construit dans* [**1**] *et* [**21**].

2. *On a un opérateur de Frobenius :*
$$i^\star \mathfrak{w}_I \simeq \phi^\star \mathfrak{w}_I$$
ou $i : \mathfrak{X}_{r+1,I} \to \mathfrak{X}_{r,I}$ *est le morphisme d'inclusion et* $\phi : \mathfrak{X}_{r+1,I} \to \mathfrak{X}_{r,I}$ *est le Frobenius.*

3. *La construction est fonctorielle en l'intervalle* I *: si* $I' \subset I$*, et si* $i_{I',I} : \mathfrak{X}_{r,I'} \to \mathfrak{X}_{r,I}$ *est le morphisme naturel alors* $i^\star_{I',I}\mathfrak{w}_I = \mathfrak{w}_{I'}$.

5.1.2. En géométrie analytique. — Le théorème suivant est essentiellement la traduction analytique du théorème 5.1. On renvoie toujours au numéro 3.3 pour les définitions des objets intervenant ci-dessous.

Théorème 5.2. — *Pour tout* $r \geq 3$ *(resp.* $r \geq 5$ *si* $p = 2$*), on possède un faisceau inversible* $\omega^\kappa_{[0,\infty[}$ *sur l'espace* $\mathcal{M}_{r,[0,\infty[}$*, ainsi qu'un sous-faisceau* $\omega^{\kappa,+}_{[0,\infty[}$ *de* $\mathscr{O}^+_{\mathcal{M}_{r,[0,\infty[}}$*-modules. Les propriétés suivantes sont vérifiées :*

1. *La restriction du sous-faisceau* $\omega^{\kappa,+}_{[0,\infty[}$ *à la composante libre* $\mathcal{W}^0_{[0,\infty[}$ *est un faisceau inversible de* $\mathscr{O}^+_{\mathcal{X}_{r,[0,\infty[}}$*-module.*

2. *Pour tout caractère localement algébrique* $\chi \cdot k : \mathbb{Z}_p^\times \to \mathbb{C}_p^\times$ *avec* χ *un caractère fini et* $k \in \mathbb{Z}$ *identifié à un point* κ *de* $\mathcal{W}^{rig}$*,* $\omega^\kappa_{[0,\infty[}|_{\{\chi \cdot k\}} = \omega^k(\chi)$ *est le faisceau usuel des formes modulaires de poids* k *et nebentypus* χ*.*

3. *Le morphisme de Frobenius* $\phi : \mathcal{M}_{r+1} \to \mathcal{M}_r$ *et l'inclusion* $i : \mathcal{M}_{r+1} \to \mathcal{M}_r$ *induisent des isomorphismes* $\phi^\star\omega^\kappa_{[0,\infty[} \simeq i^\star\omega^\kappa_{[0,\infty[}$*. Si on se restreint à* $\mathcal{W}^0_{[0,\infty[}$*, on a même des isomorphismes au niveau entier* $\phi^\star\omega^{\kappa,+}_{[0,\infty[} \simeq i^\star\omega^{\kappa,+}_{[0,\infty[}$*.*

Démonstration. Expliquons pour commencer comment se ramener à travailler sur la composante libre $\mathcal{W}^0_{[0,\infty[}$. On possède un revêtement (tour d'Igusa partielle) $f : \mathcal{IG}_{1,r} \to \mathcal{X}_r$ qui paramètre les trivialisations du sous-groupe canonique dual H_1^D (pour $p = 2$, on prend $f : \mathcal{IG}_{2,r} \to \mathcal{X}_r$, qui paramètre les trivialisations de H_2^D). C'est un torseur étale sous le groupe $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$. Pour chaque caractère $\chi : (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{Z}_p^\times$, on peut considérer le faisceau $(\omega^\chi, \omega^{\chi,+}) = (f_\star\mathscr{O}_{\mathcal{IG}_1}[\chi^{-1}], f_\star\mathscr{O}^+_{\mathcal{IG}_1}[\chi^{-1}])$ où $[\chi^{-1}]$ désigne le sous-faisceau des sections qui se transforment selon le caractère χ^{-1}. Comme f est un torseur étale, $f_\star\mathscr{O}_{\mathcal{IG}_1}[\chi^{-1}]$ est un faisceau inversible.

Supposons qu'on a construit un faisceau $(\omega^\kappa_{[0,\infty[}, \omega^{\kappa,+}_{[0,\infty[})$ ayant les propriétés attendues sur $\mathcal{W}^0_{[0,\infty[}$. En tensorisant $(\omega^\kappa_{[0,\infty[}, \omega^{\kappa,+}_{[0,\infty[})$ par les faisceaux $(\omega^\chi, \omega^{\chi,+})$ où χ parcourt les caractères du groupe $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$, on étend la construction sur $\mathcal{W}^{rig} = \coprod_\chi \mathcal{W}^0_{[0,\infty[}\cdot\chi$.

L'espace $\mathcal{W}^0_{[0,\infty[}$ est recouvert par les ouverts $\mathcal{W}^0_{[0,1]}$ et $\mathcal{W}^0_{[p^k,p^{k+1}]}$ pour $k \geq 0$. Il est donc suffisant de construire les faisceaux sur chacun de ces ouverts et de vérifier qu'ils se recollent.

Soit I un des intervalles $[0,1]$ ou $[p^k, p^{k+1}]$. Considérons le schéma formel $\mathfrak{W}^0_I = \mathrm{Spf}\ B_I$ et le schéma formel $\mathfrak{X}_{r,I} \to \mathfrak{W}^0_I$ qui a pour fibre générique $\mathcal{X}_{r,I}$. Comme $r+k \geq k+1+2$ (resp $\geq k+1+4$ si $p = 2$), on possède (thm. 5.1) un faisceau inversible $\mathfrak{w}_I$ sur $\mathfrak{X}_{r,I} \to \mathfrak{W}^0_I$. Celui-ci induit des faisceaux $(\omega^\kappa_I, \omega^{\kappa,+}_I)$ sur la fibre analytique $\mathcal{X}_{r,I}$. Les différentes fonctorialités nous permettent de recoller ces faisceaux.

□

5.1.3. Prolongement à l'infini. — Grâce au théorème 5.2, on dispose au dessus de $\mathcal{X}_{r,[0,\infty[}$ d'un couple $(\omega^{\kappa}_{[0,\infty[}, \omega^{\kappa,+}_{[0,\infty[})$ de faisceaux cohérents inversibles de $\mathscr{O}_{\mathcal{X}_{r,[0,\infty[}}$ et $\mathscr{O}^+_{\mathcal{X}_{r,[0,\infty[}}$-modules. Notre but ultime est de prolonger ces faisceaux à l'infini. Soit $j : \mathcal{X}_{r,[1,\infty[} \hookrightarrow \mathcal{X}_{r,[1,\infty]}$ l'immersion ouverte. On voudrait donc prolonger le faisceau $\omega^{\kappa}_{[1,\infty[}$ en un faisceau $\omega^{\kappa}_{[1,\infty]}$ sur $\mathcal{X}_{r,[1,\infty]}$. Le théorème 1.6 de [**19**] qui affirme qu'une fonction bornée sur un ouvert dense de Zariski d'un espace rigide normal se prolonge à tout l'espace. Nous ignorons si ce résultat est valable dans le cadre adique analytique. Dans tous les cas, il est raisonnable de poser $\omega^{\kappa,+}_{[1,\infty]} = j_\star \omega^{\kappa,+}_{[1,\infty[}$ et $\omega^{\kappa}_{[1,\infty]}$ est le faisceau associé à $\omega^{\kappa,+}_{[1,\infty]}[1/T]$. Pour tout ouvert rationnel V, une section de $\omega^{\kappa}_{[1,\infty]}$ sur V est donc une section bornée de $\omega^{\kappa}_{[1,\infty[}$ sur $\mathcal{X}_{r,[1,\infty[} \cap V$. C'est pour cette raison que nous avons cherché une structure entière canonique sur les faisceaux de formes surconvergentes. L'exemple suivant montre cependant que ce genre de prolongement est en général pathologique. On vérifiera néanmoins (essentiellement) dans la section 6 que $j_\star \omega^{\kappa,+}_{[1,\infty[}$ est bien localement libre dans notre cas.

Exemple 1. — On pose $\mathcal{S} = \mathcal{W}^0_{[1,\infty]}$ et $\mathcal{U} = \mathcal{W}^0_{[1,\infty[}$. Soit $j : \mathcal{U} \to \mathcal{S}$. On va prendre $\mathscr{F} = \mathscr{O}_{\mathcal{U}}$, le faisceau trivial. Sur chaque intervalle $[p^k, p^{k+1}]$ on pose $\mathscr{F}^+|_{\mathcal{W}^0_{[p^k,p^{k+1}]}} = \frac{p^{k+1}}{T^{\frac{1-p^{k+1}}{1-p}}} \mathscr{O}^+_{\mathcal{W}^0_{[p^k,p^{k+1}]}}$. Le faisceau est bien défini, car sur la couronne $|T^{p^k}| = |p|$, on a :

$$|\frac{p^{k+1}}{T^{\frac{1-p^{k+1}}{1-p}}}| = |\frac{p^k}{T^{\frac{1-p^k}{1-p}}}|.$$

Soit $\tilde{\mathscr{F}} = (j_\star \mathscr{F}^+)[1/T]$. Nous prétendons que le faisceau $\tilde{\mathscr{F}}$ est le prolongement par 0 du faisceau $\mathscr{O}_{\mathcal{U}}$. Soit $r \geq 0$ et soit $f \in j_\star \mathscr{F}^+(\mathcal{W}^0_{[p^r,\infty]})$ une section. Nous allons voir que $f = 0$. Clairement, $f \in \mathscr{O}^+_{\mathcal{W}^0_{[p^r,\infty]}}$. On étend les scalaires de $\mathbb{Z}_p$ à une extension finie $\mathcal{O}_K$ pour disposer d'un élément ϖ de valuation $1/p^r$. On peut écrire :

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} a_k T^k + \sum_{l=1}^{\infty} b_l (\frac{\varpi}{T})^l$$

Sur chaque couronne $|T^{p^n}| = |p|$, on a par définition $|f| \leq p^{-n+1}$. On obtient alors que :

$$\begin{aligned} |a_k| &\leq p^{-n+1+\frac{k}{p^n}} \\ |b_l| &\leq p^{-n+1-\frac{l}{p^n}+\frac{l}{p^r}} \end{aligned}$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient alors $f = 0$.

5.2. Construction d'un torseur. — Dans cette section, nous construisons un torseur de formes différentielles. Soit E le schéma semi-abélien universel sur $\mathfrak{X}_{r,I}$. On possède un sous-groupe canonique H_n d'échelon n pour tout $n \leq r+k$. Soit $\mathfrak{IG}_{n,r,I}$ la tour d'Igusa partielle formelle de niveau n et $g_n : \mathfrak{IG}_{n,r,I} \to \mathfrak{X}_{r,I}$ son morphisme structural. Soit ω_E le faisceau conormal de E. Le noyau du morphisme $\omega_E \to \omega_{H_n}$ vaut $\mathrm{Hdg}^{\frac{p^n-1}{p-1}} \omega_E$ d'apres le corollaire A.2. On a alors un diagramme de faisceaux abéliens $fppf$ sur $\mathfrak{X}_{r,I}$:

$$\begin{tikzcd} & \omega_E \arrow[d] \\ H_n^D \arrow[r, "\mathrm{HT}"] & \omega_{H_n} \arrow[d] \\ & \omega_E/p^n\mathrm{Hdg}^{-\frac{p^n-1}{p-1}} \end{tikzcd}$$

où HT est l'application de Hodge-Tate, le morphisme vertical du haut est surjectif et celui du bas est un isomorphisme.

Au dessus de $\mathfrak{IG}_{n,r,I}$, appelons $P \in H_n^D$ l'image de 1 par le morphisme universel $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \to H_n^D$. L'image par HT du point universel P engendre un sous-module $\mathrm{Hdg}^{\frac{1}{p-1}}\omega_{H_n}$ de ω_{H_n} d'après la proposition A.3.

On note $f_n : \mathfrak{F}_{n,r,I} \to \mathfrak{IG}_{n,r,I}$ le torseur sous le groupe $1 + p^n\mathrm{Hdg}^{-\frac{p^n}{p-1}}\mathbb{G}_a$ défini par $\mathfrak{F}_{n,r,I}(R) = \{\omega \in \omega_E,\ \omega = \mathrm{HT}(P) \text{ dans } \omega_E/p^n\mathrm{Hdg}^{-\frac{p^n-1}{p-1}}\}$.

On a une action de $\mathbb{Z}_p^\times$ sur $\mathfrak{F}_{n,r,I}$, donnée par $\lambda(\omega, P) = (\lambda\omega, \lambda P)$. Cette action relève l'action de $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times$ sur $\mathfrak{IG}_{n,r,I}$.

Lemme 5.1. — *Les actions de $\mathbb{Z}_p^\times$ et $(1 + p^n\mathrm{Hdg}^{-\frac{p^n}{p-1}}\mathbb{G}_a)$ sur $\mathfrak{F}_{n,r,k}$ proviennent d'une action du groupe $\mathbb{Z}_p^\times(1 + p^n\mathrm{Hdg}^{-\frac{p^n}{p-1}}\mathbb{G}_a)$.*

Démonstration. En effet, on a $\mathbb{Z}_p^\times \cap (1+p^n\mathrm{Hdg}^{-\frac{p^n}{p-1}}\mathbb{G}_a) = 1+p^n\mathbb{Z}_p$ car $p^n\mathrm{Hdg}^{-\frac{p^n}{p-1}}\mathbb{G}_a \cap \mathbb{Z}_p = p^n\mathbb{Z}_p$. Mais les actions de $1 + p^n\mathbb{Z}_p$ vu comme sous-groupe de $\mathbb{Z}_p^\times$ ou de $1 + p^n\mathrm{Hdg}^{-\frac{p^n}{p-1}}\mathbb{G}_a$ coincident. □

5.3. Le faisceau des familles de formes surconvergentes. — En utilisant le torseur $\mathfrak{F}_{n,r,I}$ nous allons définir le faisceau des familles de formes surconvergentes.

5.3.1. Construction. — Rappelons qu'on dispose, d'après la proposition 2.1, d'un accouplement :

$$\mathfrak{W}_I^0 \times \mathbb{Z}_p^\times(1 + p^{k'+1}\mathbb{G}_a) \to \mathbb{G}_m \quad \text{si} \quad p \neq 2$$

et

$$\mathfrak{W}_I^0 \times \mathbb{Z}_p^\times(1 + p^{k'+3}\mathbb{G}_a) \to \mathbb{G}_m \quad \text{si} \quad p = 2.$$

Nous supposons à présent que $n \geq k' + 2$ (resp. $n \geq k' + 4$ si $p = 2$). On dipose alors d'un caractère $\kappa : \mathbb{Z}_p^\times(1+p^n\mathrm{Hdg}^{-\frac{p^n}{p-1}}\mathbb{G}_a) \to \mathbb{G}_m$ de schémas en groupes définis sur $\mathfrak{IG}_{n,r,I}$. Il provient de l'accouplement universel car $p^n\mathrm{Hdg}^{-\frac{p^n}{p-1}}\mathbb{G}_a \subset p^{k'+1}\mathbb{G}_a$ (resp. $\subset p^{k'+3}\mathbb{G}_a$ si $p = 2$).

Définissons $\mathfrak{w}^1_{n,r,I} = (f_n)_\star\mathscr{O}_{\mathfrak{F}_{n,r,I}}[\kappa^{-1}]$, le sous-faisceau de $(f_n)_\star\mathscr{O}_{\mathfrak{F}_{n,r,I}}$ des sections qui se transforment selon le caractère κ^{-1} sous-l'action de $1+p^n\mathrm{Hdg}^{-\frac{p^n}{p-1}}\mathbb{G}_a$. C'est un faisceau inversible sur $\mathfrak{IG}_{n,r,I}$. Soit $\mathfrak{w}_{n,r,I} \subset (g_n)_\star\mathfrak{w}^1_{n,r,I}$ le sous-faisceau de $(g_n \circ f_n)_\star\mathscr{O}_{\mathfrak{F}_{n,r,I}}$ constitué des sections κ^{-1}-variantes sous l'action du groupe $\mathbb{Z}_p^\times(1 + p^n\mathrm{Hdg}^{-\frac{p^n}{p-1}}\mathbb{G}_a)$.

5.3.2. Liberté. — Dans ce numéro, nous démontrons l'inversibilité du faisceau $\mathfrak{w}_{n,r,I}$.

Lemme 5.2. — *Soit $(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{r,I}})^{00}$ l'idéal des éléments topologiquement nilpotents dans $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{r,I}}$. Supposons que $r \geq 1$ (resp. $r \geq 2$ si $p = 2$). Alors $\kappa(\mathbb{Z}_p^\times) - 1 \subset (\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{r,I}})^{00}$ et pour tout $2 \leq l \leq r + k$,*

$$\kappa(1 + p^{l-1}\mathbb{Z}_p) - 1 \subset \mathrm{Hdg}^{\frac{p^l - p}{p-1}} (\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{r,I}})^{00}.$$

Démonstration. Commençons par remarquer que $\kappa((\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times) = 1$ car on s'est restreint à la composante libre de l'espace des poids. Par conséquent, $\kappa(\mathbb{Z}_p^\times) = \kappa(1 + q\mathbb{Z}_p)$. Il suffit donc de traiter les cas $l \geq 2$ si $p \neq 2$ et $l \geq 3$ si $p = 2$. Traitons d'abord le cas $p \neq 2$. Pour $l \geq 2$, on a, d'après le lemme 2.3, $\kappa(1 + p^{l-1}\mathbb{Z}_p) - 1 \subset (T^{p^{l-2}}, p)\Lambda$. Comme $p \in \mathrm{Hdg}^{p^{r+k+1}} \mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{r,I}}$, pour $l \leq r + k$, $p\mathrm{Hdg}^{-p^l}$ est dans l'idéal des éléments topologiquement nilpotent. Par ailleurs, comme $r \geq 1$, $T \in \mathrm{Hdg}^{p^2} \mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{r,I}}$ donc $T^{p^{l-2}} \in \mathrm{Hdg}^{p^l} \mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{r,I}}$. Comme $\frac{p^l - p}{p-1} < p^l$, il en résulte que $T^{p^{l-2}} \mathrm{Hdg}^{-\frac{p^l - p}{p-1}}$ est dans l'idéal des éléments topologiquement nilpotent. Pour $p = 2$ et $l \geq 3$, on a $\kappa(1 + p^{l-1}\mathbb{Z}_p) - 1 \subset (T^{p^{l-3}}, p)\Lambda$. Le raisonnement est identique et utilise seulement $r \geq 2$ au lieu de $r \geq 1$. □

Lemme 5.3. — *L'inclusion $\mathscr{O}_{\mathfrak{IG}_{n,r,I}} \to (f_n)_\star \mathscr{O}_{\mathfrak{F}_{n,r,I}}$ induit par passage au quotient un isomorphisme :*

$$\mathscr{O}_{\mathfrak{IG}_{n,r,I}}/q \to \mathfrak{w}^1_{n,r,I}/q.$$

Démonstration. Sur tout ouvert affine de $\mathfrak{IG}_{n,r,I}$, on a une section du morphisme $\mathfrak{F}_{n,r,I} \to \mathfrak{IG}_{n,r,I}$, donnée par le choix d'une forme différentielle $\tilde{\mathrm{HT}}(P)$ qui relève $\mathrm{HT}(P)$. Remarquons que deux sections diffèrent par un élément du groupe $1 + p^n \mathrm{Hdg}^{-\frac{p^n}{p-1}} \mathbb{G}_a$. On dispose, pour chaque ouvert affine U et pour chaque section $\tilde{\mathrm{HT}}(P)$, d'un isomorphisme $\mathfrak{w}^1_{n,r,I}|_U \to \mathscr{O}_{\mathfrak{IG}_{n,r,I}}|_U$, donné par l'évaluation en la section. Réduisant modulo q et utilisant le fait que $\kappa(1 + p^n \mathrm{Hdg}^{-\frac{p^n}{p-1}} \mathbb{G}_a) \subset 1 + q\mathbb{G}_a$ d'après la proposition 2.1, on remarque que l'ambiguité dans le choix de la section disparait. On obtient donc un isomorphisme canonique $\mathfrak{w}^1_{n,r,I}/q \to \mathscr{O}_{\mathfrak{IG}_{n,r,I}}/q$ qui est l'inverse de l'isomorphisme cherché. □

Soit $\mathrm{Spf}\ A$ un ouvert affine de $\mathfrak{X}_{r,I}$. On suppose que Hdg est principal sur $\mathrm{Spf}\ A$, engendré par un élément $\tilde{\mathrm{Ha}}$. D'après le corollaire 3.1, pour tout $0 \leq n \leq r + k$, il existe des éléments

$$c_0 = 1, c_n \in \tilde{\mathrm{Ha}}^{-\frac{p^n - p}{p-1}} \mathscr{O}_{\mathfrak{IG}_{n,r,I}}(\mathrm{Spf}\ A) \quad \text{si } n \geq 1$$

tels que $\mathrm{Tr}_{\mathfrak{IG}}(c_n) = c_{n-1}$ si $n \geq 1$. Définissons un projecteur pour $r + k \geq n \geq k' + 2$ (resp. $n \geq k' + 4$ si $p = 2$) :

$$\begin{array}{rcl} e_{c_n} : (g_n)_\star \mathfrak{w}^1_{n,r,I}(\mathrm{Spf}\ A) & \to & \tilde{\mathrm{Ha}}^{-\frac{p^n - p}{p-1}} \mathfrak{w}_{n,r,I}(\mathrm{Spf}\ A) \\ s & \mapsto & \displaystyle\sum_{\sigma \in (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times} \kappa(\sigma)\sigma(c_n s) \end{array}$$

Lemme 5.4. — *Supposons $r \geq 1$ (resp. $r \geq 2$ si $p = 2$). Soit $s \in (g_n)_\star \mathfrak{w}^1_{n,r,I}(\mathrm{Spf}\ A)$ un élément qui vérifie $s = 1 \mod p$ au sens du lemme 5.3. Alors $e_{c_n}(s) \in \mathfrak{w}_{n,r,I}(\mathrm{Spf}\ A)$. De plus, $\mathfrak{w}_{n,r,I}(\mathrm{Spf}\ A)$ est le A-module libre engendré par $e_{c_n}(s)$.*

Démonstration. On a $s = 1 + ph$ pour une section $h \in \mathfrak{F}_{n,r,I}(\mathrm{Spf}\ A)$. Il en résulte que

$$e_{c_n}(s) = \sum_{\sigma \in (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times} \kappa(\tilde{\sigma})\tilde{\sigma}(c_n) + p \sum_{\sigma \in (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times} \kappa(\tilde{\sigma})\tilde{\sigma}(c_n h).$$

Dans cette formule, $\tilde{\sigma}$ est un relèvement arbitraire de σ dans $\mathbb{Z}_p^\times$. Comme $\tilde{\mathrm{Ha}}^{p^{r+k+1}} \mid p$ et $\frac{p^n-p}{p-1} < p^{r+k+1}$, il en résulte que $p\sum_{\sigma\in(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times} \kappa(\tilde{\sigma})\tilde{\sigma}(c_n h) \in A^{00}\mathfrak{F}_{n,r,I}(\mathrm{Spf}\ A)$ où A^{00} est l'idéal des éléments topologiquement nilpotent dans A.

Montrons que

$$\sum_{\sigma \in (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times} \kappa(\tilde{\sigma})\tilde{\sigma}(c_n) \in 1 + A^{00}\mathfrak{F}_{n,r,I}(\mathrm{Spf}\ A).$$

Nous allons en fait vérifier par récurrence sur $0 \leq l \leq k+r$ que $\sum_{\sigma\in(\mathbb{Z}/p^l\mathbb{Z})^\times} \kappa(\tilde{\sigma})\tilde{\sigma}(c_l) \in 1 + A^{00}\mathfrak{F}_{l,r,I}(\mathrm{Spf}\ A)$ pour n'importe quel relèvement $\tilde{\sigma}$ de σ. Pour $l = 0$, on a $c_0 = 1$ et c'est évidemment vrai. Sinon, on écrit (avec la convention $1 + p^0\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}_p^\times$) :

$$\sum_{\sigma \in 1+p^{l-1}\mathbb{Z}/p^l\mathbb{Z}} \kappa(\tilde{\sigma})\sigma(c_l) = c_{l-1} + \sum_{\sigma \in 1+p^{l-1}\mathbb{Z}/p^l\mathbb{Z}} (\kappa(\tilde{\sigma}) - 1)\sigma(c_l).$$

Comme

$$\sum_{\sigma \in 1+p^{l-1}\mathbb{Z}/p^l\mathbb{Z}} (\kappa(\tilde{\sigma}) - 1)\sigma(c_l) \in A^{00}\mathfrak{F}_{n,r,I}(\mathrm{Spf}\ A)$$

d'après le lemme 5.2. On conclût en appliquant l'hypothèse de récurrence à la formule :

$$\sum_{\sigma \in (\mathbb{Z}/p^l\mathbb{Z})^\times} \kappa(\tilde{\sigma})\sigma(c_l) = \sum_{\tau \in (\mathbb{Z}/p^{l-1}\mathbb{Z})^\times} \kappa(\tilde{\tau})\tau\big(c_{l-1} + \sum_{\sigma \in 1+p^{l-1}\mathbb{Z}/p^l\mathbb{Z}} (\kappa(\tilde{\sigma}) - 1)\sigma(c_l)\big).$$

Par conséquent, $e_{c_n}(s)$ appartient bien à $\mathfrak{w}_{n,r,I}(\mathrm{Spf}\ A)$ et c'est de plus un générateur de $(g_n)_\star\mathfrak{w}^1(\mathrm{Spf}\ A)$ comme $(g_n)_\star\mathscr{O}_{\mathfrak{IG}_{n,r,I}}(\mathrm{Spf}\ A)$-module car $e_{c_n}(s) = 1 \mod A^{00}$. Soit $t \in \mathfrak{w}_{n,r,I}(\mathrm{Spf}\ A)$. On peut le voir comme un élément de $(g_n)_\star\mathfrak{w}^1_{n,r,I}(\mathrm{Spf}\ A)$, et on a $t = \lambda e_{c_n}(s)$ avec $\lambda \in (g_n)_\star\mathscr{O}_{\mathfrak{IG}_{n,r,I}}(\mathrm{Spf}\ A)$. Mais λ est invariant sous $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times$, donc $\lambda \in A$. Ceci démontre que $\mathfrak{w}_{n,r,I}(\mathrm{Spf}\ A)$ est libre, engendré par $e_{c_n}(s)$.

□

5.4. Fonctorialité. — Dans ce numéro, nous montrons que le faisceau est fonctoriel par rapport à l'intervalle I, aux entiers n, r, et au morphisme de Frobenius.

5.4.1. Fonctorialité en l'intervalle I. — Soit $J \subset I$ un sous-intervalle. On a un morphisme naturel $i_{J,I} : \mathfrak{W}_J^0 \to \mathfrak{W}_I^0$ et on dispose d'un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{F}_{n,r,J} \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{F}_{n,r,I} \arrow[d] \\
\mathfrak{IG}_{n,r,J} \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{IG}_{n,r,I} \arrow[d] \\
\mathfrak{X}_{r,J} \arrow[r, "i_{J,I}"] & \mathfrak{X}_{r,I}
\end{tikzcd}$$

Le morphisme $\mathfrak{F}_{n,r,J} \to \mathfrak{F}_{n,r,I}$ est équivariant sous l'action du groupe $\mathbb{Z}_p^\times(1+p^n\mathrm{Hdg}^{-\frac{p^n}{p-1}}\mathbb{G}_a)$. Supposons que $n \geq k' + 2$ (resp. $n \geq k' + 4$ si $p = 2$).

Le diagramme ci-dessus induit un morphisme canonique :

$$i^{\star}_{J,I}\mathfrak{w}_{n,r,I} \to \mathfrak{w}_{n,r,J}.$$

Proposition 5.1. — *Supposons $r \geq 1$ (resp. $r \geq 2$ si $p = 2$). Le morphisme canonique précédent est un isomorphisme.*

Démonstration. Tensorisons le morphisme $i^{\star}_{J,I}\mathfrak{w}_{n,r,I} \to \mathfrak{w}_{n,r,J}$ par $(i^{\star}_{J,I}\mathfrak{w}_{n,r,I})^{-1}$. On obtient un morphisme $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{r,J}} \to \mathfrak{w}_{n,r,J} \otimes (i^{\star}_{J,I}\mathfrak{w}_{n,r,I})^{-1}$, où $\mathfrak{w}_{n,r,I} \otimes (i^{\star}_{J,I}\mathfrak{w}_{n,r,J})^{-1}$ est un sous-faisceau du faisceau des fonction invariantes sous $\mathbb{Z}_p^{\times}(1 + p^n\mathrm{Hdg}^{-\frac{p^n}{p-1}}\mathbb{G}_a)$ sur $\mathfrak{F}_{n,r,J}$, qui vaut $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{r,J}}$. Le composé

$$\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{r,J}} \to \mathfrak{w}_{n,r,J} \otimes (i^{\star}_{J,I}\mathfrak{w}_{n,r,I})^{-1} \to \mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{r,J}}$$

est l'isomorphisme canonique, et donc $i^{\star}_{J,I}\mathfrak{w}_{n,r,I} \to \mathfrak{w}_{n,r,J}$ est un isomorphisme. □

5.4.2. Fonctorialité en n. — Supposons $r + k \geq n' \geq n$. On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{F}_{n',r,k} \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{F}_{n,r,k} \arrow[d] \\
\mathfrak{IG}_{n',r,k} \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{IG}_{n,r,k} \arrow[dl] \\
\mathfrak{X}_{r,k} &
\end{tikzcd}$$

Le groupe $\mathbb{Z}_p^{\times}(1 + p^n\mathrm{Hdg}^{-\frac{p^n}{p-1}}\mathbb{G}_a)$ agit sur $\mathfrak{F}_{n,r,I}$ et $\mathbb{Z}_p^{\times}(1 + p^{n'}\mathrm{Hdg}^{-\frac{p^{n'}}{p-1}}\mathbb{G}_a)$ agit sur $\mathfrak{F}_{n',r,I}$. Le morphisme $\mathfrak{F}_{n',r,I} \to \mathfrak{F}_{n,r,I}$ est équivariant sous le morphisme évident $\mathbb{Z}_p^{\times}(1 + p^{n'}\mathrm{Hdg}^{-\frac{p^{n'}}{p-1}}\mathbb{G}_a) \to \mathbb{Z}_p^{\times}(1 + p^n\mathrm{Hdg}^{-\frac{p^n}{p-1}}\mathbb{G}_a)$.

Supposons $n \geq k' + 2$ et $r \geq 1$ (resp. $n \geq k' + 4$ et $r \geq 2$ si $p = 2$). Le diagramme ci-dessus induit un morphisme canonique :

$$\mathfrak{w}_{n,r,I} \to \mathfrak{w}_{n',r,I}.$$

Proposition 5.2. — *Le morphisme canonique précédent est un isomorphisme.*

Démonstration. Tensorisons le morphisme $\mathfrak{w}_{n,r,I} \to \mathfrak{w}_{n',r,I}$ par $\mathfrak{w}^{-1}_{n,r,I}$. On obtient un morphisme $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{r,I}} \to \mathfrak{w}_{n',r,I} \otimes \mathfrak{w}^{-1}_{n,r,I}$, où $\mathfrak{w}_{n',r,I} \otimes \mathfrak{w}^{-1}_{n,r,I}$ est un sous-faisceau du faisceau des fonction invariantes sous $\mathbb{Z}_p^{\times}(1 + p^{n'}\mathrm{Hdg}^{-\frac{p^{n'}}{p-1}}\mathbb{G}_a)$ sur $\mathfrak{F}_{n',r,I}$, qui vaut $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{r,I}}$. Le composé

$$\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{r,I}} \to \mathfrak{w}_{n',r,I} \otimes \mathfrak{w}^{-1}_{n,r,I} \to \mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{r,I}}$$

est l'isomorphisme canonique, et donc $\mathfrak{w}_{n,r,I} \to \mathfrak{w}_{n',r,I}$ est un isomorphisme. □

On écrit donc dorénavant $\mathfrak{w}_{n,r,I} = \mathfrak{w}_{r,I}$.

5.4.3. Fonctorialité à la restriction. — Soit $r' \geq r$. On a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{F}_{n,r',I} \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{F}_{n,r,I} \arrow[d] \\ \mathfrak{IG}_{n,r',I} \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{IG}_{n,r,I} \arrow[d] \\ \mathfrak{X}_{r',I} \arrow[r, "i"] & \mathfrak{X}_{r,I} \end{tikzcd}$$

Le morphisme $\mathfrak{F}_{n,r',I} \to \mathfrak{F}_{n,r,I}$ est équivariant sous l'action du groupe $\mathbb{Z}_p^\times(1+p^n\mathrm{Hdg}^{-\frac{p^n}{p-1}}\mathbb{G}_a)$. Supposons que $r' \geq r \geq 1$ et $n \geq k'+2$ (resp. $r' \geq r \geq 2$ et $n \geq k'+4$ si $p=2$). On dispose donc d'un morphisme $i^\star\mathfrak{w}_{r,I} \to \mathfrak{w}_{r',I}$.

Proposition 5.3. — *Le morphisme $i^\star\mathfrak{w}_{r,I} \to \mathfrak{w}_{r',I}$ est un isomorphisme.*

Démonstration. C'est analogue à la démonstration de la proposition 5.2. □

Dorénavant, on écrit donc $\mathfrak{w}_{r,I} = \mathfrak{w}_I$.

5.4.4. Fonctorialité pour le morphisme de Frobenius. — L'isogénie canonique $F : E \to E/H_1 := E'$ induit un morphisme $\phi : \mathfrak{X}_{r,I} \to \mathfrak{X}_{r-1,I}$. Cette application se relève en une application $\phi : \mathfrak{IG}_{n,r,I} \to \mathfrak{IG}_{n,r-1,I}$ si $n \leq k+r-1$ (voir la proposition 3.5). On a donc une application $\mathfrak{IG}_{n+1,r,I} \to \mathfrak{IG}_{n,r,I}$ obtenue en composant la projection naturelle $\mathfrak{IG}_{n+1,r,I}$ et le morphisme F. Indiquons une description directe du morphisme précédent.

Le morphisme F induit une surjection $F : H_{n+1}(E) \to H_n(E')$, et donc une injection $F^D : H_n^D(E') \to H_{n+1}^D(E)$ des duaux de cartier. Le morphisme $\mathfrak{IG}_{n+1,r,I} \to \mathfrak{IG}_{n,r-1,I}$ associe à un morphisme $\psi : \mathbb{Z}/p^{n+1}\mathbb{Z} \to H_{n+1}^D(E)$ le morphisme $\psi' : \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \to H_n^D(E')$ qui fait commuter le diagramme :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}/p^{n+1}\mathbb{Z} \arrow[r, "\psi"] & H_{n+1}^D(E) \\ \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \arrow[r, "\psi'"] \arrow[u, "\times p"] & H_n^D(E') \arrow[u, "F^D"'] \end{tikzcd}$$

On a alors d'un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{F}_{n+1,r,I} \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{F}_{n,r-1,I} \arrow[d] \\ \mathfrak{IG}_{n+1,r,I} \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{IG}_{n,r-1,I} \arrow[d] \\ \mathfrak{X}_{r,I} \arrow[r, "\phi"] & \mathfrak{X}_{r-1,I} \end{tikzcd}$$

où le morphisme $\mathfrak{F}_{n+1,r,I} \to \mathfrak{F}_{n,r-1,I}$ est obtenu à l'aide du diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} H_n^D(E') \arrow[r] \arrow[d, "HT"] & H_{n+1}^D(E) \arrow[d, "HT"] \\ \omega_{E'} \arrow[r, "F^\star"] & \omega_E \end{tikzcd}$$

Pour toute $\mathbb{Z}_p$-algèbre plate R, on associe à $\omega \in \mathfrak{F}_{n+1,r,I}(R)$, la forme différentielle $p\omega$, qui est vue dans $\omega_{E'}$ et qui appartient bien à $\mathfrak{F}_{n,r-1,k}(R)$.

Le morphisme $\mathfrak{F}_{n+1,r,k} \to \mathfrak{F}_{n,r-1,k}$ est équivariant sous le morphisme de groupes $\mathbb{Z}_p^\times(1+p^{n+1}\mathrm{Hdg}(E)^{-\frac{p^{n+1}}{p-1}}\mathbb{G}_a) \to \mathbb{Z}_p^\times(1+p^n\mathrm{Hdg}(E')^{-\frac{p^n}{p-1}}\mathbb{G}_a)$. Supposons $r \geq 2$ et $n \geq k'+2$ (resp. $r \geq 3$ et $n \geq k'+4$ si $p=2$). On dispose d'un morphisme $\phi^\star\mathfrak{w}_I \to \mathfrak{w}_I$.

Proposition 5.4. — *Le morphisme $\phi^\star\mathfrak{w}_I \to \mathfrak{w}_I$ est un isomorphisme.*

Démonstration. C'est analogue à la démonstration de la proposition 5.2. □

6. Perfectisation

Dans la partie précédente, nous avons expliqué la construction de faisceaux inversibles $\omega^\kappa_{[0,\infty[}$. Notre but est désormais de prolonger ces faisceaux à l'infini. La difficulté est la suivante : sur $[0,\infty[$ on a utilisé l'analyticité locale du caractère universelle. A l'infini, le caractère cesse d'être localement analytique. Ceci est cependant compensé par la fait qu'un sous-groupe canonique d'ordre infini existe. Nous allons considérer un pro-revêtement d'un voisinage strict de la courbe modulaire sur lequel la tour d'Igusa d'ordre infini existe. Ceci nous permettra de définir le faisceau des formes surconvergentes perfectisé de façon uniforme sur ce pro-revêtement. Ensuite nous le descendrons au voisinage strict de la courbe modulaire en utilisant des traces de Tate.

6.1. Résultats principaux. — Le théorème qui suit est le résultat principal de cette partie. Il rassemble le théorème 6.4 et la proposition 6.8.

Théorème 6.1. — *Supposons $r \geq 3$ si $p \neq 2$ et $r \geq 5$ si $p = 2$, alors on possède un faisceau inversible $\mathfrak{w}_{[p,\infty]}$ sur $\mathfrak{X}_{r,[p,\infty]}$. Ce faisceau jouit des propriétés suivantes :*

1. *Pour tout intervalle $J = [p^k, p^{k'}] \subset [p,\infty[$ et $r+k \geq k'+2$ (resp. $r+k \geq k'+4$ si $p=2$), l'image inverse de $\mathfrak{w}_{[p,\infty]}$ dans $\mathfrak{X}_{r,J}$ vaut le faisceau $\mathfrak{w}_J$ du théorème 5.1.*
2. *La restriction de $\mathfrak{w}_{[p,\infty]}$ à $\mathfrak{X}_{r,\{\infty\}}$ vaut le faisceau $\mathfrak{w}_{\{\infty\}}$ du théorème 4.1.*
3. *On a un opérateur de Frobenius :*
$$i^\star\mathfrak{w}_{[p,\infty]} \simeq \phi^\star\mathfrak{w}_{[p,\infty]}$$
ou $i : \mathfrak{X}_{r+1,[p,\infty]} \to \mathfrak{X}_{r,[p,\infty]}$ est le morphisme d'inclusion et $\phi : \mathfrak{X}_{r+1,[p,\infty]} \to \mathfrak{X}_{r,[p,\infty]}$ est le Frobenius.

Il entraîne immédiatement le résultat suivant qui est le résultat principal de ce travail :

Théorème 6.2. — *Pour tout $r \geq 3$ (resp. $r \geq 5$ si $p=2$), on possède un faisceau inversible $\omega^\kappa_{[0,\infty]}$ sur l'espace $\mathcal{M}_{r,[0,\infty]}$, ainsi qu'un sous-faisceau $\omega^{\kappa,+}_{[0,\infty]}$ de $\mathcal{O}^+_{\mathcal{M}_{r,[0,\infty]}}$-modules. Les propriétés suivantes sont vérifiées :*

1. *La restriction du sous-faisceau $\omega^{\kappa,+}_{[0,\infty]}$ à la composante libre $\mathcal{W}^0_{[0,\infty]}$ est un faisceau inversible de $\mathcal{O}^+_{\mathcal{X}_{r,[0,\infty]}}$-module.*

2. *Pour tout caractère localement algébrique* $\chi.k : \mathbb{Z}_p^\times \to \mathbb{C}_p^\times$ *avec* χ *un caractère fini et* $k \in \mathbb{Z}$ *identifié à un point de* $\mathcal{W}$, $\omega^\kappa_{[0,\infty]}|_{\{\chi.k\}} = \omega^k(\chi)$ *est le faisceau usuel des formes modulaires de poids* k *et nebentypus* χ.
3. *Pour tout caractère* $\bar\kappa_\chi : \mathbb{Z}_p^\times \to \mathbb{F}_p[[T]]^\times$ *identifié à un point du bord de* $\mathcal{W}$, $\omega^\kappa_{[0,\infty]}|_{\{\bar\kappa_\chi\}} = \omega^{\bar\kappa_\chi}$ *où* $\omega^{\bar\kappa_\chi}$ *est le faisceau des formes surconvergentes en caractéristique* p*, de poids* $\bar\kappa_\chi$ *(voir le numéro 4.4.5).*
4. *Le morphisme de Frobenius* $\phi : \mathcal{M}_{r+1,[0,\infty]} \to \mathcal{M}_{r,[0,\infty]}$ *et l'inclusion* $i : \mathcal{M}_{r+1,[0,\infty]} \to \mathcal{M}_{r,[0,\infty]}$ *induisent des isomorphismes* $\phi^\star\omega^\kappa_{[0,\infty]} \simeq i^\star\omega^\kappa_{[0,\infty]}$. *Si on se restreint à* $\mathcal{W}^0_{[0,\infty]}$, *on a même des isomorphismes au niveau entier* $\phi^\star\omega^{\kappa,+}_{[0,\infty]} \simeq i^\star\omega^{\kappa,+}_{[0,\infty]}$.

Démonstration. Sur $\mathfrak{M}_{r,[p,\infty]}$ on possède le faisceau $\mathfrak{w}_I \otimes \mathfrak{w}^f$ où $\mathfrak{w}_I$ est donné par la théorème 6.1 et $\mathfrak{w}^f$ est construit au numéro 6.8. Sa fibre générique est par définition $(\omega^\kappa_{[p,\infty]}, \omega^{\kappa,+}_{[p,\infty]})$. Ce faisceau se recolle avec le faisceau $(\omega^\kappa_{[0,\infty[}, \omega^{\kappa,+}_{[0,\infty[})$ du théorème 5.2. □

Ce théorème permet de construire la courbe de Hecke adique. Soit $f_r : \mathcal{M}_{r,[0,\infty]} \to \mathcal{W}$ le morphisme structural et $\Omega_r = (f_r)_\star\omega^\kappa_{[0,\infty]}$ le faisceau des familles de formes r-surconvergentes sur $\mathcal{W}$. Le théorème qui suit est démontré au numéro 6.9.

Théorème 6.3. — *On possède sur* Ω_r *une action compacte de l'opérateur* U_p *et une action de l'algèbre de Hecke* H *de niveau premier à* p*. En conséquence,*

1. *L'opérateur* U_p *possède une série caractéristique* $\mathcal{P}(X)$ *à coefficient dans* Λ*, qui coincide avec la série caractéristique de Coleman.*
2. *La spécialisation en un point* $\{\bar\kappa_\chi\} \hookrightarrow \mathcal{W}$ *de* $\mathcal{P}(X)$ *est la série caractéristique de* U_p *agissant sur* $M^\dagger_{\bar\kappa_\chi}$.
3. *On peut définir la variété spectrale* $w : \mathcal{Z} \to \mathcal{W}$*, qui est localement quasi-finie, plate et partiellement propre sur* $\mathcal{W}$*. En particulier, localement sur* $\mathcal{Z}$ *et* $\mathcal{W}$*, le morphisme* w *est fini et plat.*
4. *On possède une variété de Hecke* $\mathcal{E} \to \mathcal{Z}$ *finie et sans torsion sur* $\mathcal{Z}$.

6.2. La tour anticanonique. — Soit $I = [p^k, p^{k'}]$ un sous-intervalle de $[1,\infty]$ avec $k, k' \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$. Rappelons qu'on a des morphismes finis et plats de Frobenius (voir la proposition 3.2) :

$$\phi : \mathfrak{X}_{r+1,I} \to \mathfrak{X}_{r,I}.$$

Soit $\mathfrak{X}_{\infty,I} = \lim_r \mathfrak{X}_{r,I}$ le schéma formel T-adique obtenu par limite inverse. C'est la tour anticanonique (voir [**22**], sect. 3). Pour tout $n \leq r+k$, on possède aussi une tour d'Igusa partielle $\mathfrak{IG}_{n,r,I}$ et on a un morphisme de Frobenius compatible avec le morphisme au dessus (voir la proposition 3.5) :

$$\phi : \mathfrak{IG}_{n,r+1,I} \to \mathfrak{IG}_{n,r,I}.$$

En passant à la limite projective on obtient le schéma formel T-adique $\mathfrak{IG}_{n,\infty,I} \to \mathfrak{X}_{\infty,I}$. Le morphisme précédent est affine et entier. En faisant varier n, on obtient finalement une tour de schémas formels $\mathfrak{IG}_{n+1,\infty,I} \to \mathfrak{IG}_{n,\infty,I} \to \cdots \to \mathfrak{X}_{\infty,I}$. On note alors $\mathfrak{IG}_{\infty,\infty,I}$ la limite projective, dans la catégorie des schémas formels T-adiques, de cette tour. Le groupe $\mathbb{Z}_p^\times$ agit sur $\mathfrak{IG}_{\infty,\infty,I}$.

Au dessus de $\mathfrak{X}_{\infty,I}$, on a une chaîne d'isogénies entre schémas semi-abéliens :

$$\cdots E_r \xrightarrow{F_r} E_{r-1} \cdots$$

où E_r provient de $\mathfrak{X}_{r,I}$. Soit Hdg_r l'idéal de Hodge associé à E_r. On a $\mathrm{Hdg}_{r+1}^p = \mathrm{Hdg}_r$ d'après le corollaire A.2.

Pour tout $n \leq r+k$, on dispose (voir le numéro 3.2.2) d'un morphisme de Trace $\mathrm{Tr}_{\mathfrak{IG}} : \mathscr{O}_{\mathfrak{IG}_{n,r,I}} \to \mathscr{O}_{\mathfrak{IG}_{n-1,r,I}}$, fonctoriel pour les applications de Frobenius. Par passage à la limite inductive et complétion, on obtient un morphisme $\mathrm{Tr}_{\mathfrak{IG}} : \mathscr{O}_{\mathfrak{IG}_{n,\infty,I}} \to \mathscr{O}_{\mathfrak{IG}_{n-1,\infty,I}}$. Nous utilisons pour simplifier la notation $\mathrm{Tr}_{\mathfrak{IG}}$ pour tous les morphismes de trace dans la tour d'Igusa partielle. Cette notation omet la référence à la source et au but de ces morphismes.

Proposition 6.1. — *On a* $\mathrm{Hdg}_r \mathscr{O}_{\mathfrak{IG}_{n-1,\infty,I}} \subset \mathrm{Tr}_{\mathfrak{IG}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{IG}_{n,\infty,I}})$ *pour tout* $r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$.

Démonstration. D'après la proposition 3.4, on a $\mathrm{Hdg}_r^{p^{n-1}} \subset \mathrm{Tr}_{\mathfrak{IG}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{IG}_{n,r,I}})$. Il en résulte que pour tout $r \geq n$, $\mathrm{Hdg}_{r-n+1} = \mathrm{Hdg}_r^{p^{n-1}} \subset \mathrm{Tr}_{\mathfrak{IG}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{IG}_{n,\infty,I}})$. □

Remarque 6.1. — Le fait de passer à la tour anticanonique a donc tué la ramification de la tour d'Igusa. C'est naturel car la tour anti-canonique $\mathfrak{X}_{\infty,I}$ est "relativement perfectoide" au dessus de l'espace des poids.

6.3. Traces de Tate. — L'objectif de cette section est de construire des traces de Tate qui permettent de redescendre le long de la tour anti-canonique. Notons $h_r : \mathfrak{X}_{\infty,I} \to \mathfrak{X}_{r,I}$ la projection évidente. Le résultat principal de cette section est le suivant.

Proposition 6.2. — *Pour tout* $r \geq 1$, *on a des traces de Tate :*

$$\mathrm{Tr}_r : (h_r)_\star \mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{\infty,I}}[1/T] \to \mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{r,I}}[1/T]$$

telles que pour tout $f \in \mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{\infty,I}}[1/T]$, $f = \lim_{r\to\infty} \mathrm{Tr}_r f$. *De plus, pour tout* $r \geq 1$ *(resp.* $r \geq 2$ *si* $p = 2$*),*

$$\mathrm{Tr}_r((h_r)_\star \mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{\infty,I}}) \subset T^{-1} \mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{r,I,\infty}}.$$

6.3.1. Un lemme sur la trace. — Le lemme suivant est la généralisation directe du corollaire III.2.21 de [**22**].

Lemme 6.1. — *Soit* $n \geq 1$ *un entier. Soit* S *une* $\mathbb{Z}_p$ *algèbre complète, topologiquement de type fini, de dimension* d, *formellement lisse. Soit* B *une* $\mathbb{Z}_p[[T]]$*- algèbre, sans torsion comme* $\mathbb{Z}_p[[T]]$*-module, intègre et* T*-adiquement complète. On suppose aussi que* B *possède un élement* $T^{1/p^{n+1}}$ *et que* $p \in TB$. *Soit* $R = S\hat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p} B$. *Soit* $f \in S$ *tel que* $\bar{f} \in S/p$ *n'est pas diviseur de* 0. *Soit* $R_n = R\langle u_n \rangle / (f u_n - T^{1/p^n})$. *Soit* $F : R_n \to R_{n+1}$ *une application* B*-linéaire telle que modulo* pT^{-1/p^n}, F *est donnée par* $F(u_n) = u_{n+1}^p$ *et par le Frobenius sur* S/p. *Alors* $R_{n+1}[1/T]$ *est une algèbre finie et plate au dessus de* $R_n[1/T]$ *et* $\mathrm{Tr}_F(R_{n+1}) \subset p^d T^{-\frac{2d+1}{p^n}} R_n$.

Démonstration. Commençons par remarquer que R_n et R_{n+1} sont des $\mathbb{Z}_p$-algèbres plates. En effet, $S\hat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p} B = R$ est plate sur $\mathbb{Z}_p$ et donc $R\langle u_n \rangle$ aussi. Soit $x, y \in R\langle u_n \rangle$ tels que $px = y(fu_n - T^{1/p^n})$. Posons $x = \sum_k a_k u_n^k$ et $y = \sum_k b_k u_n^k$. On obtient alors $b_k f = T^{1/p^n} b_{k+1} + pa_k$. Si on réduit modulo T^{1/p^n} la relation $b_k f = T^{1/p^n} b_{k+1} + pa_k$, on obtient $b_k \in (p, T^{1/p^n})$ car $f \otimes 1$ n'est pas diviseur de 0 dans $S/p \otimes_{\mathbb{F}_p} B/T^{1/p^n}$. Montrons par récurrence sur l que $b_k \in (p, T^{l/p^n})R$ pour tout $l \geq 1$. Cela montrera que $b_k \in pR$, puis que $x \in (fu_n - T^{1/p^n})$. Supposons donc l'hypothèse vérifiée au cran $l-1$. Réduisant modulo $(p, T^{l/p^n})$ la relation $b_k f = T^{1/p^n} b_{k+1} + pa_k$ on obtient $b_k f = 0$ dans $S/p \otimes_{\mathbb{F}_p} B/(p, T^{l/p^n})$ et, comme f n'est pas diviseur de 0 dans $S/p \otimes_{\mathbb{F}_p} B/(p, T^{l/p^n})$ on obtient $b_k \in (p, T^{l/p^n})R$.

Comme le lemme est local sur Spf S, on peut supposer qu'il y a une application Spf $S \to$ Spf $\mathbb{Z}_p\langle Y_1, ..., Y_d\rangle$ étale. On peut donc supposer que S/p est, vue comme S/p-module via le Frobenius, un S/p-module libre de base $Y_1^{i_1}...Y_d^{i_d}$ avec $1 \leq i_k \leq p-1$. Soit maintenant l'algèbre $R'_{n+1} = R\langle v_n\rangle/(f^p v_n - T^{1/p^n})$. C'est aussi une $\mathbb{Z}_p$-algèbre plate. On a une application $\tau : R'_{n+1} \to R_{n+1}$ donnée par $v_n \mapsto u_{n+1}^p$. Après inversion de T, cette application est un isomorphisme, d'inverse donné par $u_{n+1} \mapsto v_n f^{p-1} T^{-\frac{p-1}{p^{n+1}}}$. On en déduit que le morphisme τ est injectif, de conoyau tué par $T^{\frac{p-1}{p^{n+1}}}$. On va maintenant vérifier que le morphisme $F : R_n \to R_{n+1}$ se factorise en $\tau \circ F'$ pour un morphisme $F' : R_n \to R'_{n+1}$. Pour le voir, il suffit de le vérifier modulo $T^{\frac{p^{n+1}-1}{p^{n+1}}}$ car toutes les algèbres en jeu sont sans T-torsion et $\frac{p^{n+1}-1}{p^{n+1}} > \frac{p-1}{p^{n+1}}$. Comme T divise p, on se ramène à le vérifier pour $F \mod \frac{p}{T^{1/p^n}}$, et c'est alors évident. On vérifie de même que $F' \mod \frac{p}{T^{2/p^n}}$ est l'application qui envoie u_n sur v_n est qui est le Frobenius absolu sur $S \mod p$. On en déduit que $R'_{n+1} \mod \frac{p}{T^{2/p^n}}$ est fini et plate comme $R_n/\frac{p}{T^{2/p^n}}$-algèbre, engendrée par $Y_1^{i_1}...Y_d^{i_d}$, $1 \leq i_k \leq p-1$. La même chose est vraie pour R'_{n+1} vue comme R_n-algèbre. Il en résulte que $R'_{n+1} = R_n\langle X_1, ..., X_d\rangle/(X_1^p - Y_1 - \frac{p}{T^{2/p^n}} P_1, ..., X_d^p - Y_d - \frac{p}{T^{2/p^n}} P_d)$ pour des polynômes $P_i \in R_n\langle X_1, ..., X_d\rangle$. On peut alors appliquer le lemme III. 2. 20 de [**22**] pour en déduire que $\mathrm{Tr}_{F'}(R'_{n+1}) \subset \frac{p^d}{T^{2d/p^n}} R_n$. Il en résulte alors que $\mathrm{Tr}_F(R_{n+1}) \subset \frac{p^d}{T^{2d+1/p^n}} R_n$. □

6.3.2. Extraction de racines de T. — Pour appliquer le lemme précédent, nous avons besoin d'extraire des racines de T dans l'espace des poids. Pour tout $k \geq 0$, on note $\mathcal{W}^{0,p^{-k}} = \mathrm{Spa}(\mathbb{Z}_p[[T^{1/p^k}]], \mathbb{Z}_p[[T^{1/p^k}]])^{an}$. Si $k = 0$ on note indifféremment $\mathcal{W}^{0,p^{-0}}$ ou $\mathcal{W}$. Pour $k' \leq k$, le morphisme évident $\mathbb{Z}_p[[T^{1/p^{k'}}]] \to \mathbb{Z}_p[[T^{1/p^k}]]$ fournit des applications $\mathcal{W}^{0,p^{-k}} \to \mathcal{W}^{0,p^{-k'}}$. On note $\mathcal{W}_I^{0,p^{-k}}$ l'image inverse de $\mathcal{W}_I^0$ dans $\mathcal{W}^{0,p^{-k}}$. On pose $B_{I,p^{-k}} = \mathrm{H}^0(\mathcal{W}_I^{0,p^{-k}}, \mathscr{O}^+_{\mathcal{W}^{0,p^{-k}}})$ et $\mathfrak{W}_I^{0,p^{-k}} = \mathrm{Spf}\ B_{I,p^{-k}}$. On observe que le morphisme qui envoie T sur T^{1/p^k} induit un isomorphisme $B_{p^{-k}I} \to B_{I,p^{-k}}$. Soit $k \geq r+1$. On note $\mathcal{X}_{r,I,p^{-k}}$ le produit fibré $\mathcal{X}_{r,I} \times_{\mathcal{W}_I^0} \mathcal{W}_I^{0,p^{-k}}$. On définit alors $\mathfrak{X}_{r,I,p^{-k}}$ comme le normalisé de $\mathfrak{X}_{r,I}$ dans $\mathcal{X}_{r,I,p^{-k}}$.

6.3.3. Description de $\mathfrak{X}_{r,I,p^{-k}}$. — On a une chaîne de morphismes affines

$$\mathfrak{X}_{r,I,p^{-k}} \to \mathfrak{X}_{r,I} \to \mathfrak{X}_I \to \mathfrak{X}.$$

Si Spf A est un ouvert affine de $\mathfrak{X}$, si le faisceau ω_E est trivial sur Spf A et si $\tilde{\mathrm{Ha}} \in A$ est un relèvement de l'invariant de Hasse dans la trivialisation, la fibre au dessus de Spf A de cette chaîne de morphismes vaut (voir la remarque 3.1) :

$$A \to A\hat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p} B_I \to A\hat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p} B_I\langle \frac{T}{\tilde{\mathrm{Ha}}^{p^{r+1}}}\rangle \to A\hat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p} B_{I,p^{-k}}\langle \frac{T^{1/p^{r+1}}}{\tilde{\mathrm{Ha}}}\rangle$$

6.3.4. Application du lemme. — On a un carré cartésiens (la colonne de gauche est le changement de base, de $\mathcal{W}_I^0$ à $\mathcal{W}_{I,p^{-k}}^0$ de la colonne de droite) :

(6.3.A)
$$\begin{tikzcd} \mathcal{X}_{r,I,p^{-k}} \arrow[r] \arrow[d, "\phi"] & \mathcal{X}_{r,I} \arrow[d, "\phi"] \\ \mathcal{X}_{r-1,I,p^{-k}} \arrow[r] & \mathcal{X}_{r-1,I} \end{tikzcd}$$

Celui-ci est la fibre analytique d'un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{X}_{r,I,p^{-k}} \arrow[r] \arrow[d, "\phi"] & \mathfrak{X}_{r,I} \arrow[d, "\phi"] \\ \mathfrak{X}_{r-1,I,p^{-k}} \arrow[r] & \mathfrak{X}_{r-1,I} \end{tikzcd}$$

Il en résulte que le morphisme $\phi : \mathfrak{X}_{r,I,p^{-k}} \to \mathfrak{X}_{r-1,I,p^{-k}}$ est localement donné par un morphisme d'algèbres :

$$A\hat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p} B_{I,p^{-k}}\langle \frac{T^{1/p^r}}{\tilde{\mathrm{Ha}}}\rangle \to A\hat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p} B_{I,p^{-k}}\langle \frac{T^{1/p^{r+1}}}{\tilde{\mathrm{Ha}}}\rangle$$

qui modulo pT^{-1/p^r} provient du morphisme de Frobenius absolu sur A.

Corollaire 6.1. — *On a*

1. *Pour tout* $k \geq r+1$, $\mathrm{Tr}_\phi(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{r,I,p^{-k}}}) \subset pT^{-\frac{3}{p^r}}\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{r-1,I,p^{-k}}}$,
2. *Pour tout* $k \geq r+1$ *et* $r' \geq r$, $\mathrm{Tr}_{\phi^{r'-r}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{r',I,p^{-k}}}) \subset p^{r'-r}T^{-\frac{3}{p^r(p-1)}}\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{r,I,p^{-k}}}$.
3. *Pour tout* $r' \geq r \geq 1$ *(resp.* $r \geq 2$ *si* $p=2$*)*, $\mathrm{Tr}_{\phi^{r'-r}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{r',I}}) \subset p^{r'-r}T^{-1}\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{r,I}}$.

Démonstration. Les points 1 et 2 résultent immédiatement du lemme 6.1 appliqué pour $d=1$. Comme le diagramme 6.3.A est cartésien, on déduit de 2 que $\mathrm{Tr}_{\phi^{r'-r}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{r',I}}) \subset p^{r-r'}T^{-\frac{3}{p^r(p-1)}}\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{r,I,p^{-k}}} \cap \mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{r,I}}[1/T]$. Pour $r \geq 1$ (resp. $r \geq 2$), il suffit de voir que $T^{-\frac{3}{p^r(p-1)}}\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{r,I,p^{-k}}} \cap \mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{r,I}}[1/T] \subset T^{-1}\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{r,I}}$. C'est clair car $\mathfrak{X}_{r,I,p^{-k}}$ est fini sur $\mathfrak{X}_{r,I}$ qui est integralement clos dans sa fibre analytique et $\frac{3}{p^r(p-1)} \leq 1$. □

Corollaire 6.2. — *Pour tout* $r \geq 1$, *on a des traces de Tate :*

$$\mathrm{Tr}_r : (h_r)_\star\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{\infty,I}}[1/T] \to \mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{r,I}}[1/T]$$

telles que pour tout $f \in \mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{\infty,I}}[1/T]$, $f = \lim_{r\to\infty}\mathrm{Tr}_r f$. *De plus, pour tout* $r \geq 1$ *(resp.* $r \geq 2$ *si* $p=2$*),*

$$\mathrm{Tr}_r((h_r)_\star\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{\infty,I}}) \subset T^{-1}\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{r,I,\infty}}.$$

Démonstration. Considérons l'application

$$\frac{1}{p^{r'-r}}\mathrm{Tr}_{\phi^{r-r'}} : \mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{r',I}}[1/T] \to \mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{r,I}}[1/T].$$

Cette application envoie $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{r',I}}$ dans $T^{-1}\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{r,I}}$. On obtient, en passant à la limite inductive, une application $\mathrm{Tr}_r : \mathrm{colim}_{r'}\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{r',I}}[1/T] \to \mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{r,I,\infty}}[1/T]$. Cette application est uniformément continue. On peut donc la prolonger par continuité en une application $\mathrm{Tr}_r : \mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{\infty,I}}[1/T] \to \mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{r,I}}[1/T]$. □

6.4. Le faisceau modulaire sur la tour anti-canonique. — Nous allons maintenant pouvoir définir le faisceau des formes surconvergentes sur le perfectisé.

Lemme 6.2. — *Le faisceau* $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{\infty,I}}$ *est intégralement clos dans* $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{\infty,I}}[1/T]$.

Démonstration. Soit Spf R un ouvert de $\mathfrak{X}_{\infty,I}$. Pour tout r suffisamment grand, Spf R provient d'un ouvert Spf R_r de $\mathfrak{X}_{r,I}$. Soit $f \in R[1/T]$. On suppose que f vérifie une relation de dépendance intégrale sur R. Pour r suffisament grand, $f = f_r + h$ avec $f_r \in R_r[1/T]$ et $h \in R$. On peut donc supposer que $f \in R_r[1/T]$. Soit $f^n + f^{n-1}a_{n-1} + \cdots + a_0 = 0$ une relation de dépendance avec $a_i \in R$. En appliquant $\mathrm{Tr}_{r'}$ pour $r' \geq r$ on obtient $f^n + f^{n-1}\mathrm{Tr}_{r'}(a_{n-1}) + \cdots + \mathrm{Tr}_{r'}(a_0) = 0$ et comme $a_i \in R$, pour r' suffisamment grand $\mathrm{Tr}_{r'}(a_i) \in R \cap T^{-1}R_{r'}$. Pour tout $r'' \geq r'$, le morphisme $R_{r'} \to R_{r''}$ est fidèlement plat, donc $R_{r'}/T \to R_{r''}/T$ est injectif et par conséquent $R_{r'}/T \to R/T$ aussi. Il en résulte que $T\mathrm{Tr}_{r'}(a_i) \in TR_{r'}$ et donc $\mathrm{Tr}_{r'}(a_i) \in R_{r'}$. En conclusion, f_r vérifie une relation de dépendance sur $R_{r'}$, donc $f_r \in R_{r'}$. □

Lemme 6.3. — *On a* $(\mathscr{O}_{\mathfrak{IG}_{n,\infty,I}})^{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}} = \mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{\infty,I}}$.

Démonstration. Soit Spf R un ouvert de $\mathfrak{X}_{\infty,I}$. Soit Spf R_n son image inverse dans $\mathfrak{IG}_{n,\infty,I}$. Le morphisme $R[1/T] \to R_n[1/T]$ est fini étale, donc $(R_n)^{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}} \subset R[1/T]$. Comme R_n est entier sur R, le lemme précédent permet de conclure. □

Proposition 6.3. — *On a* $(\mathscr{O}_{\mathfrak{IG}_{\infty,\infty,I}})^{\mathbb{Z}_p^\times} = \mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{\infty,I}}$.

Démonstration. Soit Spf R un ouvert affine de $\mathfrak{X}_{\infty,I}$. Soit $x \in (\mathscr{O}_{\mathfrak{IG}_{\infty,\infty,I}}(\mathrm{Spf}\ R))^{\mathbb{Z}_p^\times}$. On a $x = x' + Tx''$ avec $x' \in \mathscr{O}_{\mathfrak{IG}_{n,\infty,I}}(\mathrm{Spf}\ A)$ pour n assez grand. Il en résulte que $x'' \in (\mathscr{O}_{\mathfrak{IG}_{\infty,\infty,I}}(\mathrm{Spf}\ A))^{1+p^n\mathbb{Z}_p}$. Pour tout $n' \geq n$, on possède, d'après la proposition 6.1, un élément $c_{n'} \in \mathscr{O}\mathfrak{IG}_{n',\infty,I}(\mathrm{Spf}\ A)$ tel que $\mathrm{Tr}_{\mathfrak{IG}_{n',\infty,I}/\mathfrak{IG}_{n,\infty,I}}(c_{n'}) = T$. Par conséquent, la cohomologie supérieure de $(1 + p^n\mathbb{Z}/p^{n'}\mathbb{Z})$ agissant sur $\mathscr{O}\mathfrak{IG}_{n',\infty,I}(\mathrm{Spf}\ A)$ est annulée par T (voir [**24**], sect. 3.2, coro. 1). Pour tout s, il existe $n(s) \geq n$ tel que

$$x'' \bmod T^s \in (\mathscr{O}_{\mathfrak{IG}_{n(s),\infty,I}}/T^s)^{1+p^n\mathbb{Z}_p},$$

et donc, il existe $y_s \in \mathscr{O}_{\mathfrak{IG}_{n,\infty,I}}(\mathrm{Spf}\ A)$ tel que $y_s \mod T^s = Tx''$. Il en résulte que y_s converge vers un élement y quand $s \to \infty$ et que $Tx'' = y$. Il en résulte que $x \in \mathscr{O}_{\mathfrak{IG}_{n,\infty,I}}(\mathrm{Spf}\ A)$ et on conclut par le lemme précédent. □

On définit alors le faisceau $\mathfrak{w}_I^{perf}$ comme le sous-faisceau de $\mathscr{O}_{\mathfrak{IG}_{\infty,\infty,I}}$ des sections qui se transforment selon le caractère κ^{-1} pour l'action du groupe $\mathbb{Z}_p^\times$.

Proposition 6.4. — *Le faisceau* $\mathfrak{w}_I^{perf}$ *est un faisceau localement libre de rang* 1.

Démonstration. Soit Spf A un ouvert affine de $\mathfrak{X}_{\infty,I}$. On suppose que Hdg_1 est principal sur Spf A, engendré par un élément $\tilde{\mathrm{Ha}}_1$. Grâce à la proposition 6.1, on peut trouver une suite d'éléments $c_n \in \tilde{\mathrm{Ha}}_1^{-1}\mathscr{O}_{\mathfrak{IG}_{n,\infty,I}}(A)$ tels que $\mathrm{Tr}_{\mathfrak{IG}}(c_n) = c_{n-1}$, $c_1 = \frac{1}{p-1}$, $c_0 = 1$.

Posons alors $b_0 = 1$ et pour tout $n \geq 1$, $b_n = \sum_{\sigma \in (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times} \kappa(\tilde{\sigma})\sigma.c_n$, où $\tilde{\sigma}$ est un relèvement de σ dans $\mathbb{Z}_p^\times$. D'après le lemme 2.3, on a $\kappa(1 + p^n\mathbb{Z}_p) \subset 1 + T^n\mathscr{O}_{\mathfrak{W}_I}$ (resp. $1 + T^{n-1}\mathscr{O}_{\mathfrak{W}_I}$ si $p = 2$) et $\kappa(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}^\times) = 1$. Un autre choix de relèvement $\tilde{\sigma}'$ donnerait un élément b'_n et :

- $b'_n - b_n \in \frac{T^n}{\tilde{\mathrm{Ha}}_1}\mathscr{O}_{\mathfrak{IG}_{n,\infty,I}}(A)$ si $p \neq 2$ et $n \geq 2$,
- $b'_n - b_n \in \frac{T^{n-1}}{\tilde{\mathrm{Ha}}_1}\mathscr{O}_{\mathfrak{IG}_{n,\infty,I}}(A)$ si $p = 2$ et $n \geq 2$,
- $b_1 - b'_1 \in TA$.

On vérifie comme dans la démonstration du théorème 4.1 que :

- $b_n - b_{n-1} \in (T^{n-1}\tilde{\mathrm{Ha}}_1^{-1})\mathscr{O}_{\mathfrak{IG}_{n,\infty,I}}(A)$ si $n \geq 2$ et $p \neq 2$,
- $b_n - b_{n-1} \in (T^{n-2}\tilde{\mathrm{Ha}}_1^{-1})\mathscr{O}_{\mathfrak{IG}_{n,\infty,I}}(A)$ si $n \geq 3$ et $p = 2$,
- $b_1 - 1 \in TA$,

– $b_2 - 1 \in T\tilde{\mathrm{Ha}}_1^{-1}\mathscr{O}_{\mathfrak{IG}_{2,\infty,I}}(A)$.
La suite b_n converge donc vers un élément $b_\infty \in \mathscr{O}_{\mathfrak{IG}_{\infty,\infty,I}}(A)$ et $b_\infty = 1 \bmod \frac{T}{\mathrm{Ha}_1}$ est un élément inversible de $\mathscr{O}_{\mathfrak{IG}_{\infty,\infty,I}}(A)$. Il résulte alors de la proposition 6.3 que $\mathfrak{w}_I^{perf}(A) = b_\infty.A$. □

Proposition 6.5. — *Soit $J \subset I$ un sous-intervalle et $i_{J,I} : \mathfrak{X}_{\infty,J} \hookrightarrow \mathfrak{X}_{\infty,I}$ le morphisme naturel. On a la compatibilité au changement de base :*

$$i_{J,I}^\star \mathfrak{w}_I^{perf} = \mathfrak{w}_J^{perf}$$

Démonstration. Analogue à la démonstration de la proposition 5.2. □

6.5. Comparaison avec le faisceau $\mathfrak{w}_I$. — Dans ce numéro, $I = [p^k, p^{k'}]$ avec $k, k' \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. On suppose $k + r \geq k' + 1$ (resp. $k + r \geq k' + 3$ si $p = 2$) et $r \geq 1$ (resp. $r \geq 2$ si $p = 2$). Sur $\mathfrak{X}_{r,I}$, on possède, d'après le théorème 5.1, un faisceau $\mathfrak{w}_I$. Le but de cette section est de démontrer que son image inverse sur la tour anti-canonique est le faisceau $\mathfrak{w}_I^{perf}$.

Au dessus de $\mathfrak{X}_{\infty,I}$, on a une chaine d'isogénies

$$\cdots E_r \xrightarrow{F_r} E_{r-1} \to \cdots$$

où E_r est le schéma semi-abélien qui provient de $\mathfrak{X}_{r,I}$. On note $C_{n,r} \hookrightarrow E_r[p^n]$ le schéma en groupes $\mathrm{Ker}(F_{r+n}^D : E_r \to E_{r+n})$. Clairement, $C_{n,r} = H_n(E_{r+n})^D$. L'isogénie $F_r : E_r \to E_{r-1}$ induit un morphisme $C_{n,r} \to C_{n,r-1}$ qui est un isomorphisme génériquement. Au dessus de $\mathfrak{IG}_{n,\infty,I}$, on possède un morphisme universel $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \to H_n(E_r)^D$ pour tout $r \geq n - k$. De plus, l'application $C_{n,r} \to E_r[p^n]/H_n(E_r) \simeq H_n(E_r)^D$ est clairement un isomorphisme générique. En composant, on possède donc une application $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \to C_{n,r}$ pour tout $r \geq n - k$. En utilisant les morphismes $C_{n,r} \to C_{n,r-1}$ on en déduit l'existence de morphismes $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \to C_{n,r}$ pour tout n et r qui sont des isomorphismes génériques. En passant à la limite projective, on obtient un morphisme $\mathbb{Z}_p \to \lim_n C_{n,r}$. Soit HT^{un} l'image de $1 \in \lim_n C_{n,r}$ par l'application de Hodge-Tate $\lim_n E_r[p^n] \to \omega_{E_r}$. Par définition, HT^{un} fournit une application $\mathbb{Z}_p^\times$-équivariante :

$$\mathfrak{IG}_{\infty,\infty,I} \to \mathfrak{F}_{n,r,I}$$

qui s'insert dans le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{IG}_{\infty,\infty,I} \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{F}_{n,r,I} \arrow[d] \\
\mathfrak{IG}_{n,\infty,I} \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{IG}_{n,r,I} \arrow[d] \\
\mathfrak{X}_{\infty,I} \arrow[r, "h_r"] & \mathfrak{X}_{r,I}
\end{tikzcd}$$

Proposition 6.6. — *On dispose d'un isomorphisme canonique $\mathfrak{w}_I^{perf} \simeq (h_r)^\star \mathfrak{w}_I$.*

Démonstration. On possède clairement une application injective : $(h_r)^\star\mathfrak{w}_I \to \mathfrak{w}_I^{perf}$. De plus, $\mathfrak{w}_I^{perf} \otimes (h_r)^\star \mathfrak{w}_I^{-1} \subset (\mathscr{O}_{\mathfrak{IG}_{\infty,\infty,I}})^{\mathbb{Z}_p^\times} = \mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{\infty,I}}$ d'après la proposition 6.3. □

Corollaire 6.3. — *On dispose d'une trace de Tate $\mathrm{Tr}_r : (h_r)_\star \mathfrak{w}_I^{perf} \to \mathfrak{w}_I$. Cette trace est fonctorielle en l'intervalle I.*

6.6. Descente. — Dans cette section, fixons $I = [p, \infty]$. Nous allons montrer que le faisceau $\mathfrak{w}_I^{perf}$ descend sur $\mathfrak{X}_{r,I}$ pour $r \geq 3$ (resp. $r \geq 5$ si $p = 2$).

Le théorème 1.6 de [**19**] affirme que dans un espace rigide normal sur un corps, une fonction bornée sur un ouvert dense de Zariski se prolonge à tout l'espace. Il serait intéressant de savoir si cet énoncé reste valable pour un espace adique analytique. Le lemme suivant le montre dans un cas très particulier.

Lemme 6.4. — *On a un isomorphisme de faisceaux sur $\mathfrak{X}_{r,I}$:*

$$\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{r,I}} = \lim_{k+1 \geq k' \geq k \geq 1} \mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{r,[p^k,p^{k'}]}}.$$

Démonstration. D'après [**19**], thm. 1.6, on a $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{r,[p,p^{k''}]}} = \lim_{k'' \geq k+1 \geq k' \geq k \geq 1} \mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{r,[p^k,p^{k'}]}}$. On se ramène donc à vérifier que $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{r,I}} = \cap_{k \geq 0} \mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{r,[p,p^k]}}$. Il suffit de le vérifier sur une base d'ouverts de $\mathfrak{X}_{r,I}$. Soit Spf A un ouvert affine de $\mathfrak{X}$. On suppose que ω_E est trivial sur Spf A. La fibre dans $\mathfrak{X}_{r,I}$ de Spf A vaut Spf $B = A[[T]]\langle u, w\rangle/(w\tilde{\mathrm{Ha}}^{p^{r+1}} - T, T^p u - p)$ où $\tilde{\mathrm{Ha}}$ est un relèvement de l'invariant de Hasse identifié à un scalaire (voir la remarque 3.1). La fibre dans $\mathfrak{X}_{r,[p,p^k]}$ vaut Spf B_k avec $B_k = B\langle v_k\rangle/(uv_k - T^{p^k - p})$. L'application $B_{k+1} \to B_k$ envoie v_{k+1} sur $T^{p^{k+1}-p^k} v_k$. Soit $I_k = (w\tilde{\mathrm{Ha}}^{p^{r+1}} - T, T^p u - p, uv_k - T^{p^k - p})$ le noyau de la surjection $A[[T]]\langle u, w, v_k\rangle \to B_k$. Les suites exactes $0 \to I_k \to A[[T]]\langle u, w, v_k\rangle \to B_k \to 0$ forment un système projectif où les applications de transition sont celles qui envoient v_{k+1} sur $T^{p^{k+1}-p^k} v_k$. En réduisant modulo T^n, on obtient un système projectif $0 \to I_k/T^n \to A[[T]]\langle u, w, v_k\rangle/T^n \to B_k/T^n \to 0$ de suites exactes qui satisfait la condition de Mittag-Leffler. Il en résulte que $\lim_k B_k/T^n = B/T^n$. Puis, en passant à la limite sur n, on obtient $\lim_n \lim_k B_k/T^n = B$. Comme $\lim_n \lim_k B_k/T^n = \lim_k \lim_n B_k/T^n = \lim_k B_k$, on conclût. $\square$

Lemme 6.5. — *On a un isomorphisme de faisceaux sur $\mathfrak{X}_{\infty,I}$:*

$$\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{\infty,I}} = \lim_{k+1 \geq k' \geq k \geq 1} \mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{\infty,[p^k,p^{k'}]}}.$$

Démonstration. Soit $(f_{k,k'}) \in \lim_{k+1 \geq k' \geq k \geq 1} \mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{\infty,[p^k,p^{k'}]}}$. En appliquant la trace de Tate (voir la proposition 6.2) on obtient, pour tout $r \geq 1$, un élément $\big(\mathrm{Tr}_r(f_{k,k'})\big) \in \lim_{k+1 \geq k' \geq k \geq 1} T^{-1} \mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{r,[p^k,p^{k'}]}}$. D'après le lemme précédent, cet élément est représenté par un élément $f_r \in T^{-1}\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{r,I}}$. Pour r assez grand, $\mathrm{Tr}_r(f_{1,1}) \in \mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{\infty,\{p\}}}$ (c'est à dire qu'il n'y a pas de pôle en T). Ceci entraîne facilement que $f_r \in \mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{r,I}}$. De même, on vérifie sans problème que $T\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{r,\{p\}}} \cap \mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{r,I}} = T\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{r,I}}$. La convergence de $\mathrm{Tr}_r(f_{k,k'})$ vers $f_{k,k'}$ entraîne donc la convergence de f_r vers un élément $f \in \mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{\infty,I}}$. Comme la restriction de f à $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{\infty,[p^k,p^{k'}]}}$ vaut $f_{k,k'}$, f représente l'élément $(f_{k,k'})$. $\square$

Lemme 6.6. — *Soit $r = 3$ si $p \neq 2$ et $r = 5$ si $p = 2$. Soit $k \geq 1$. Supposons $r \leq n \leq k+r$. On a*

$$\kappa(1 + p^{n-1}\mathbb{Z}_p) - 1 \subset \mathrm{Hdg}_r^{\frac{p^n - p}{p-1}} T^2 \mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{r,[p^k,\infty]}}.$$

Démonstration. Soit Spf A un ouvert de $\mathfrak{X}_{r,[p^k,\infty]}$ sur lequel $\mathrm{Hdg}_r = (\tilde{\mathrm{Ha}}_r)$. On a $\kappa(1 + p^{n-1}\mathbb{Z}_p) - 1 \subset (pT, T^{p^{n-2}})$ (resp. $(pT, T^{p^{n-3}})$ pour $p = 2$). On a alors dans A les formules

$$\frac{p}{\tilde{\mathrm{Ha}}_r^{p^{r+k}}} = pT^{-p^k}\Big(\frac{T}{\tilde{\mathrm{Ha}}_r^{p^{r+1}}}\Big)^{p^{k-1}} T^{p^k - p^{k-1}} \quad \text{et} \quad \frac{T^{p^{n-2}}}{\tilde{\mathrm{Ha}}_r^{p^{n+1}}} = \Big(\frac{T}{\tilde{\mathrm{Ha}}_r^{p^{r+1}}}\Big)^{p^{n-r}} T^{p^{n-2} - p^{n-r}}.$$

Le lemme en résulte car $p^k - p^{k-1} + 1 \geq 2$ pour tout $k \geq 1$, $p^{n-2} - p^{n-3} \geq 2$ pour tout $n \geq 3$ si $p \neq 2$ et $p^{n-3} - p^{n-5} \geq 2$ si $p = 2$ et $n \geq 5$. □

Nous sommes maintenant préparés pour démontrer la descente.

Théorème 6.4. — *Le faisceau $\mathfrak{w}_I^{perf}$ descend en un faisceau inversible $\mathfrak{w}_I$ sur $\mathfrak{X}_{r,I}$ avec $r \geq 3$ si $p \geq 3$ et $r \geq 5$ si $p = 2$. Précisément, $\mathfrak{w}_I$ est l'unique sous-faisceau cohérent de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{r,I}}$-modules de $\mathfrak{w}_I^{perf}$ tel que, pour tout intervalle $J \subset I$, si on note $i_{J,I} : \mathfrak{X}_{r,J} \to \mathfrak{X}_{r,I}$ l'application évidente, alors on a un isomorphisme canonique $i_{J,I}^\star \mathfrak{w}_I = \mathfrak{w}_J$ induit par l'isomorphisme $i_{J,I}^\star \mathfrak{w}_I^{perf} = \mathfrak{w}_J^{perf}$.*

Démonstration. On pose $\mathfrak{w}_I = \lim_{k+1 \geq k' \geq k \geq 1} \mathfrak{w}_{[p^k, p^{k'}]}$. C'est un faisceau de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{r,I}}$-modules. Nous allons commencer par démontrer que c'est un faisceau inversible qui descend le faisceau $\mathfrak{w}_I^{perf}$. La définition de $\mathfrak{w}_I$ est motivée par le numéro 5.1.3. Il suffit de démontrer le théorème lorsque r est le plus petit possible. Nous supposons donc que $r = 5$ si $p = 2$ et $r = 3$ si $p \geq 3$. Commençons par fixer un ouvert Spf A de $\mathfrak{X}$ sur lequel le faisceau ω_E est trivial. Soit Spf B l'image inverse de cet ouvert dans $\mathfrak{X}_{r,I}$. Comme ω_E est trivial, Hdg_r est trivial, engendré par un élément $\tilde{\mathrm{Ha}}_r$. Soit $c_0 = 1 \in \mathscr{O}_{\mathfrak{IG}_{0,r,I}}(\mathrm{Spf}\ B)$, $c_1 = \frac{1}{p-1} \in \mathscr{O}_{\mathfrak{IG}_{1,r,I}}(\mathrm{Spf}\ B)$, $c_n \in \tilde{\mathrm{Ha}}_r^{-\frac{p^n-p}{p-1}} \mathscr{O}_{\mathfrak{IG}_{n,r,I}}(\mathrm{Spf}\ B)$, pour $n \leq r$ et $c_n \in \tilde{\mathrm{Ha}}_r^{-p^r} \mathscr{O}_{\mathfrak{IG}_{n,\infty,I}}(\mathrm{Spf}\ B)$ pour $n \geq r+1$ des éléments tels que $\mathrm{Tr}_{\mathfrak{IG}}(c_n) = c_{n-1}$ (ces élements existent d'après le corollaire 3.1 et la proposition 6.1). On pose $b_n = \sum_{\sigma \in (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times} \kappa(\tilde{\sigma})\sigma.c_n$, où $\tilde{\sigma}$ est un relèvement de σ dans $\mathbb{Z}_p^\times$. On a $b_n - b_{n-1} \in T^{n-1}\tilde{\mathrm{Ha}}_r^{-p^r}$ (resp. $T^{n-2}\tilde{\mathrm{Ha}}_r^{-p^r}$ si $p = 2$). Soit $b_\infty \in \mathscr{O}_{\mathfrak{IG}_{\infty,\infty,I}}(\mathrm{Spf}\ B)$ la limite des b_n. Comme dans la démonstration de la proposition 6.4, on voit que $b_\infty = 1 \mod T\tilde{\mathrm{Ha}}^{-p^r}$. C'est donc un générateur du faisceau $\mathfrak{w}_I^{perf}$ sur Spf B. On observe également que $b_\infty - b_r = 1 \mod T^r\tilde{\mathrm{Ha}}_r^{-p^r}$ et donc $b_\infty - b_r = 1 \mod T^2$.

Soit $J = [p^k, p^{k+1}]$ avec $k \geq 1$. Considérons le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{IG}_{\infty,\infty,I} \arrow[d] & \mathfrak{IG}_{\infty,\infty,J} \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{F}_{k+r,r,J} \arrow[d] \\
\mathfrak{IG}_{k+r,\infty,I} \arrow[d] & \mathfrak{IG}_{k+r,\infty,J} \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{IG}_{k+r,r,J} \arrow[d] \\
\mathfrak{X}_{\infty,I} & \mathfrak{X}_{\infty,J} \arrow[l] \arrow[r, "h_r"] & \mathfrak{X}_{r,J}
\end{tikzcd}$$

Soit Spf C l'image inverse de Spf B dans $\mathfrak{X}_{r,J}$. Soit $s \in \mathscr{O}_{\mathfrak{F}_{k+r,r,J}}(\mathrm{Spf}\ C)$ une section telle que $\sigma.s = \kappa^{-1}(\sigma)s$ pour tout $\sigma \in (1 + p^{k+r}\mathrm{Hdg}_r^{-\frac{p^{k+r}}{p-1}}\mathbb{G}_a)$ et $s = 1 \mod q$ (voir le lemme 5.3). Pour tout $0 \leq n \leq r+k$, soit $c'_n \in \tilde{\mathrm{Ha}}_r^{-\frac{p^n-p}{p-1}} \mathscr{O}_{\mathfrak{IG}_{n,r,J}}(\mathrm{Spf}\ C)$ des éléments tels que $\mathrm{Tr}_{\mathfrak{IG}}(c'_n) = c'_{n-1}$ et $c'_n = c_n$ si $n \leq r$. On note alors $f = \sum_{\sigma \in (\mathbb{Z}/p^{k+r}\mathbb{Z})^\times} \kappa(\sigma)\sigma.c'_{r+k}s$. C'est un générateur de $\mathfrak{w}_J$ sur Spf C, d'après le lemme 5.4. Comme $T^{p^k} \mid p$ et $\tilde{\mathrm{Ha}}_r^{p^{r+1}} \mid T$ dans C, il en résulte que

$$p\tilde{\mathrm{Ha}}_r^{-p^{r+k}} = (pT^{-p^k})(T\tilde{\mathrm{Ha}}_r^{-p^{r+1}})^{p^{k-1}} T^{p^k - p^{k-1}}.$$

Comme $f = \sum_{\sigma\in(\mathbb{Z}/p^{k+r}\mathbb{Z})^\times} \kappa(\tilde\sigma)\sigma.c'_{r+k} \mod q\tilde{\mathrm{Ha}}_r^{-p^{r+k}}$, on obtient donc que $f = \sum_{\sigma\in(\mathbb{Z}/p^{k+r}\mathbb{Z})^\times} \kappa(\tilde\sigma)\sigma.c'_{r-}$ $\mod T^2$. Montrons maintenant par récurrence descendante sur $r \leq n \leq r+k$ que $f = \sum_{\sigma\in(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times} \kappa(\tilde\sigma)\sigma.c'_n \mod T^2$.

$$\begin{aligned}\sum_{\sigma\in(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times} \kappa(\tilde\sigma)\sigma.c'_n &= \sum_{\tau\in(\mathbb{Z}/p^{n-1}\mathbb{Z})^\times} \kappa(\tilde\tau)\tilde\tau.(\sum_{\sigma\in(1+p^{n-1}\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})} \kappa(\tilde\sigma)\sigma.c'_n)\\ &= \sum_{\tau\in(\mathbb{Z}/p^{n-1}\mathbb{Z})^\times} \kappa(\tilde\tau)\tilde\tau.\big(c'_{n-1} + \sum_{\sigma\in(1+p^{n-1}\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})} (\kappa(\tilde\sigma)-1)\sigma.c'_n\big)\end{aligned}$$

D'après le lemme 6.6, $(\kappa(\tilde\sigma)-1)\sigma.c'_n = 0 \mod T^2$. On conclût donc la récurrence. Vérifions à présent que $f = b_\infty \mod T^2$ vues comme des sections de $\mathscr{O}_{\mathfrak{J}\mathfrak{G}_{\infty,\infty,J}}(\mathrm{Spf}\ C)$.

On a alors dans $\mathscr{O}_{\mathfrak{J}\mathfrak{G}_{\infty,\infty,J}}(\mathrm{Spf}\ C) \mod T^2$:

$$\begin{aligned} f &= \sum_{\sigma\in(\mathbb{Z}/p^{k+r}\mathbb{Z})^\times} \kappa(\tilde\sigma)\sigma.c'_{r+k}\\ &= \sum_{\sigma\in\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}} \kappa(\tilde\sigma)\sigma.c_r\\ &= b_r\\ &= b_\infty\end{aligned}$$

On a donc $b_\infty = (1+T^2u)f$ pour une fonction $u \in \mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{\infty,J}}(\mathrm{Spf}\ C)$. Il en résulte que $\mathrm{Tr}_r(b_\infty) = f(1+T^2\mathrm{Tr}_r(u))$. Comme $\mathrm{Tr}_r(u) \in T^{-1}C$ d'après la proposition 6.2, il en résulte que $\mathrm{Tr}_r(b_\infty)$ est un générateur de $\mathfrak{w}_J$ sur Spf C. Comme la construction de $\mathrm{Tr}_r(b_\infty)$ est fonctorielle en J, on obtient que $\mathfrak{w}_I(\mathrm{Spf}\ B) = \mathrm{Tr}_r(b_\infty)\lim_{k+1\geq k'\geq k\geq 1}\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{r,[p^k,p^{k'}]}}(\mathrm{Spf}\ B) = Tr_r(b_\infty).B$ d'après le lemme 6.4. Ceci démontre que le faisceau $\mathfrak{w}_I$ est un faisceau inversible de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{r,I}}$-modules et que pour tout intervalle $J\subset I$, $i^\star_{J,I}\mathfrak{w}_I = \mathfrak{w}_J$. D'autre part, le lemme 6.5 entraine que $\lim_{k+1\geq k'\geq k\geq 1}\mathfrak{w}^{perf}_{[p^k,p^{k'}]} = \mathfrak{w}^{perf}_I$. Ceci entraîne alors que $h_r^\star\mathfrak{w}_I = \mathfrak{w}_I^{perf}$. Le faisceau $\mathfrak{w}_I$ descend bien le faisceau $\mathfrak{w}_I^{perf}$. Démontrons maintenant l'unicité. Soit $\mathfrak{w}'_I \subset \mathfrak{w}_I^{perf}$ un faisceau cohérent de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{r,I}}$-modules ayant les propriétés du théorèmes. Il est clair que l'inclusion $\mathfrak{w}'_I \subset \mathfrak{w}_I^{perf}$ se factorise à travers $\mathfrak{w}'_I \hookrightarrow \mathfrak{w}_I$. Cette application induit pour tout $k+1\geq k'\geq k\geq 1$ un isomorphisme $\mathfrak{w}'_I\otimes\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{r,[p^k,p^{k'}]}} \to \mathfrak{w}_I\otimes\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{r,[p^k,p^{k'}]}}$ et on conlût par le lemme 6.4. □

Remarque 6.2. — La démonstration montre plus précisément que le faisceau $\mathfrak{w}_I$ est trivial sur l'image inverse de tout ouvert affine de $\mathfrak{X}$ au dessus duquel le faisceau ω_E est trivial.

Proposition 6.7. — *On a un opérateur de Frobenius :*

$$i^\star\mathfrak{w}_{[p,\infty]} \simeq \phi^\star\mathfrak{w}_{[p,\infty]}$$

ou $i : \mathfrak{X}_{r+1,[p,\infty]} \to \mathfrak{X}_{r,[p,\infty]}$ *est le morphisme d'inclusion et* $\phi : \mathfrak{X}_{r+1,[p,\infty]} \to \mathfrak{X}_{r,[p,\infty]}$ *est le Frobenius.*

Démonstration. Le faisceau $\mathfrak{w}_I$ est canoniquement déterminé à partir des faisceaux $\mathfrak{w}_I^{perf}$ et $\mathfrak{w}_J$ pour $J\subset [p,\infty[$. Il hérite donc des fonctorialités de ces derniers. □

6.7. Comparaison avec le faisceau $\mathfrak{w}_{\{\infty\}}$. — Dans la section précédente, nous avons construit un faisceau $\mathfrak{w}_I$ sur l'intervalle $I = [p, \infty]$. Nous allons maintenant vérifier que sa fibre en l'infini est bien le faisceau $\mathfrak{w}_{\{\infty\}}$ du numéro 4.4.1.

Proposition 6.8. — *Pour tout entier $k_0 \geq 1$, l'inclusion naturelle de $\mathfrak{w}_{[p^{k_0},\infty]}$ dans $\mathscr{O}_{\mathfrak{IG}_{\infty,\infty,[p^{k_0},\infty]}}$ se factorise modulo $T^{p^{k_0}-p^{k_0-1}-1}$ en un morphisme*

$$\mathfrak{w}_{[p^{k_0},\infty]} \to \mathscr{O}_{\mathfrak{IG}_{r+k_0,r,[p^{k_0},\infty]}}/T^{p^{k_0}-p^{k_0-1}-1}.$$

La restriction de $\mathfrak{w}_I$ à $\mathfrak{X}_{r,\{\infty\}}$ est un sous-faisceau de $\mathscr{O}_{\mathfrak{IG}_{\infty,r,\{\infty\}}}$ qui s'identifie canoniquement à $\mathfrak{w}_{\{\infty\}}$.

Démonstration. Fixons un entier k_0. Soit $\operatorname{Spf} B$ un ouvert affine de $\mathfrak{X}_{r,[p^{k_0},\infty]}$. On suppose Hdg trivial sur $\operatorname{Spf} B$, engendré par un élément $\tilde{\mathrm{Ha}}$. Fixons des éléments $c_0 = 1$ et, pour $1 \leq n \leq k_0 + r$, $c_n \in \tilde{\mathrm{Ha}}^{-\frac{p^n-p}{p-1}} \mathscr{O}_{\mathfrak{IG}_{n,r,[p^{k_0},\infty]}}(\operatorname{Spf} B)$ tels que $\mathrm{Tr}_{\mathfrak{IG}}(c_n) = c_{n-1}$. Complétons cette suite en choisissant, pour $n \geq r + k_0 + 1$, des éléments $c_n \in \tilde{\mathrm{Ha}}^{-p^{r+k_0}} \mathscr{O}_{\mathfrak{IG}_{n,\infty,[p^{k_0},\infty]}}(\operatorname{Spf} B)$ vérifiant $\mathrm{Tr}_{\mathfrak{IG}}(c_n) = c_{n-1}$. On pose $b_n = \sum_{\sigma \in (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times} \kappa(\tilde{\sigma})\sigma.c_n$, où $\tilde{\sigma}$ est un relèvement de σ dans $\mathbb{Z}_p^\times$. La suite b_n converge dans $\mathscr{O}_{\mathfrak{IG}_{\infty,\infty,[p^{k_0},\infty]}}$ vers un générateur b_∞ du faisceau $\mathfrak{w}_I^{perf}$ (d'après la démonstration de la proposition 6.4). On vérifie que pour tout $n \geq r+k_0$, $b_{n+1} = b_n \mod T^{p^{k_0}-p^{k_0-1}}$. En effet, en raisonnant comme dans la démonstration du théorème 4.1, on voit que

$$b_{n+1} = b_n \mod (\kappa(1+p^{r+k_0}) - 1)\tilde{\mathrm{Ha}}^{-p^{r+k_0}}$$

or on observe que $(\kappa(1+p^{r+k_0}) - 1)) \subset (T^{p^{k_0}})$ et $T^{p^{k_0-1}} \in (\tilde{\mathrm{Ha}}^{-p^{r+k_0}})$. Il en résulte que $b_\infty = b_{r+k_0} \mod T^{p^{k_0}-p^{k_0-1}}$.

Fixons à présent un intervalle $[p^k, p^{k+1}]$ avec $k \geq k_0$. Soit $\operatorname{Spf} C$ l'image inverse de $\operatorname{Spf} B$ dans $\mathfrak{X}_{r,[p^k,p^{k+1}]}$. Fixons des élements $c'_n \in \tilde{\mathrm{Ha}}^{-\frac{p^n-p}{p-1}} \mathscr{O}_{\mathfrak{IG}_{n,r,[p^k,p^{k+1}]}}(\operatorname{Spf} C)$ pour $r + k_0+1 \leq n \leq r+k$ vérifiant $\mathrm{Tr}_{\mathfrak{IG}}(c'_n) = c'_{n-1}$ pour $n \geq r+k_0+2$ et $\mathrm{Tr}_{\mathfrak{IG}}(c'_{r+k_0+1}) = c_{r+k_0}$. Il existe alors un générateur f du faisceau $\mathfrak{w}_I$ sur $\operatorname{Spf} C$ tel que $f = \sum_{\sigma\in(\mathbb{Z}/p^{r+k}\mathbb{Z})^\times} \kappa(\tilde{\sigma})\sigma.c'_{r+k} \mod p\tilde{\mathrm{Ha}}^{-p^{r+k}}$ d'après le lemme 5.4. Dans C, $T^{p^k} \mid p$ et $\tilde{\mathrm{Ha}}^{-p^{r+k}} \mid T^{p^{k-1}}$. Ceci entraîne que $f = \sum_{\sigma\in(\mathbb{Z}/p^{r+k}\mathbb{Z})^\times} \kappa(\tilde{\sigma})\sigma.c'_{r+k} \mod T^{p^{k_0}-p^{k_0-1}}$. En raisonnant comme au dessus on obtient alors $f = b_{r+k_0} \mod T^{p^{k_0}-p^{k_0-1}}$. Par conséquent, dans $\mathscr{O}_{\mathfrak{IG}_{\infty,\infty,[p^k,p^{k+1}]}}(\operatorname{Spf} C)$ on a $f = b_\infty = b_{r+k_0} \mod T^{p^{k_0}-p^{k_0-1}}$. En appliquant la trace de Tate on obtient $f = \mathrm{Tr}_r(b_\infty) = b_\infty \mod T^{p^{k_0}-p^{k_0-1}-1}\mathfrak{w}^{perf}_{[p^k,p^{k+1}]}(\operatorname{Spf} C)$. Comme cette relation est valable sur les intervalles $[p^k, p^{k+1}]$, elle entraine que $\mathrm{Tr}_r(b_\infty) = b_\infty \mod T^{p^{k_0}-p^{k_0-1}-1}\mathfrak{w}^{perf}_{[p^{k_0},\infty]}(\operatorname{Spf} B)$ par une variante évidente du lemme 6.5. Il en résulte que $\mathrm{Tr}_r(b_\infty) = b_{r+k_0} \mod T^{p^{k_0}-p^{k_0-1}-1}\mathscr{O}_{\mathfrak{IG}_{\infty,\infty,[p^{k_0},\infty]}}$(S

On peut donc définir un morphisme $\mathfrak{w}_{[p^{k_0},\infty]} \to \mathscr{O}_{\mathfrak{IG}_{r+k_0,r,[p^{k_0},\infty]}}/T^{p^{k_0}-p^{k_0-1}-1}$ qui sur $\operatorname{Spf} B$ envoie $\mathrm{Tr}_r(b_\infty)$ sur b_{r+k_0}. Ce morphisme factorise canoniquement le morphisme $\mathfrak{w}_{[p^{k_0},\infty]} \to \mathscr{O}_{\mathfrak{IG}_{\infty,\infty,[p^{k_0},\infty]}}/T^{p^{k_0}-p^{k_0-1}-1}$. En comparant la définition de b_{r+k_0} et la construction du faisceau $\mathfrak{w}_{\{\infty\}}$ (voir le théorème 4.1), on obtient que la restriction de $\mathfrak{w}_I$ à $\mathfrak{X}_{r,\{\infty\}}$ vaut $\mathfrak{w}_{\{\infty\}}$.

□

6.8. La partie finie du caractère. — Rappelons que $\mathfrak{W}_I = \mathrm{Spf}\ B_I[(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times]$ et que $\mathfrak{M}_{r,I} = \mathfrak{X}_{r,I} \otimes_{\mathfrak{W}_I^0} \mathfrak{W}_I$ (voir 3.3 pour les notations). Soit $\kappa^f : (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times \to B_I[(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times]$ le caractère universel. Soit $h : \mathfrak{IG}_{i,r,I} \times_{\mathfrak{W}_I^0} \mathfrak{W}_I \to \mathfrak{M}_{r,I}$ le morphisme structural où $i = 1$ si $p \neq 2$ et $i = 2$ si $p = 2$. On note alors $\mathfrak{w}_I^f = h_\star \mathscr{O}_{\mathfrak{IG}_{i,r,I} \times_{\mathfrak{W}_I^0} \mathfrak{W}_I}[(\kappa^f)^{-1}]$. C'est un faisceau cohérent de fibre analytique inversible car le morphisme h est fini étale en fibre analytique. Sur $\mathfrak{M}_{r,I}$ on peut considérer le faisceau $\mathfrak{w}_I \otimes \mathfrak{w}_I^f$. Sa fibre analytique sur $\mathcal{M}_{r,I}$ est le faisceau ω_I^κ.

6.9. Construction de la courbe de Hecke adique. — Dans ce numéro, nous démontrons le théorème 6.3.

6.9.1. Projectivité. — Dans cette sous-partie nous posons $I = [p, \infty]$. Fixons $r \geq 3$ (resp. $r \geq 5$ si $p = 2$). Soit $M = \mathrm{H}^0(\mathcal{M}_{r,I}, \omega_I^\kappa)$. Pour alléger les notations, posons $B_0 = B_I[\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}^\times]$ et $B = B_0[1/T]$.

Proposition 6.9. — *Le B-module de Banach M est projectif.*

Démonstration. Fixons un recouvrement affine fini $\cup_i \mathrm{Spf}\ A_i$ de la courbe modulaire $\mathfrak{X}$ sur $\mathrm{Spf}\ \mathbb{Z}_p$, tel que sur chaque ouvert $\mathrm{Spf}\ A_i$, le faisceau ω_E est trivial. Soit V_i l'image inverse de $\mathrm{Spf}\ A_i$ dans $\mathcal{M}_{r,I}$. Notons que $\cup_i V_i$ est un recouvrement affinoide de l'affinoide $\mathcal{M}_{r,I}$. D'après [**14**], thm. 2.2, on a une suite exacte longue

$$0 \to M \to \oplus_i \mathrm{H}^0(V_i, \omega_I^\kappa) \to \oplus_{i \neq j} \mathrm{H}^0(V_i \cap V_j, \omega_I^\kappa) \cdots$$

et on est donc ramené à montrer la projectivité de $\mathrm{H}^0(V, \omega_I^\kappa)$ où V est l'intersection de certains ouverts V_i (corollaire B.2). Soit $\mathrm{Spf}\ A$ une intersection de certains $\mathrm{Spf}\ A_i$ et soit $\mathrm{Spf}\ C$ l'image inverse de $\mathrm{Spf}\ A$ dans $\mathfrak{X}_{r,I}$. Alors par la remarque 6.2, le faisceau $\mathfrak{w}_I(\mathrm{Spf}\ C)$ est trivial. Vérifions que $\mathrm{Spf}\ C$ est la complétion d'un B_I-module libre. Par construction,

$$B_I = \mathbb{Z}_p[[T]]\langle u \rangle/(T^p u - p) \quad \text{et} \quad C \simeq A[[T]]\langle u, v \rangle/(T^p u - p, \tilde{\mathrm{Ha}}^{p^{r+1}} v - T)$$

Il en résulte que $B_I/TB_I = \mathbb{F}_p[u]$ et $C/TC = (A/p)[v, u]/(\tilde{\mathrm{Ha}}^{p^{r+1}} v - T)$. Soit $(e_j)_{j \in J}$ une base algébrique du $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel $(A/p)[v]/(\tilde{\mathrm{Ha}}^{p^{r+1}} v - T)$. Un relèvement arbitraire de cette base dans C fournit une base topologique de C comme B_I-module.

Soit $\mathrm{Spf}\ D$ l'image inverse de $\mathrm{Spf}\ C$ dans la tour d'Igusa partielle $\mathfrak{IG}_{i,r,I}$ avec $i = 1$ si $p \neq 2$ et $i = 2$ si $p = 2$. Alors $D[1/T]$ est une algèbre fini étale sur $C[1/T]$ et en particulier, $D[1/T]$ est un $B_I[1/T]$ module de Banach projectif. Par conséquent, $D[(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times][1/T]$ est un B-module projectif. Soit $\kappa^f : (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times \to B^\times$ le caractère tautologique. Soit $D[(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times][1/T][(\kappa^f)^{-1}]$ le facteur direct de $D[(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times][1/T]$ des éléments qui se transforment via κ^f pour l'action de $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$. C'est donc un B-module projectif. Par définition, ce B-module est $\mathrm{H}^0(V, \omega_I^\kappa)$. □

6.9.2. La courbe de Hecke. — Soit $f_r : \mathcal{M}_{r,[0,\infty]} \to \mathcal{W}$ le morphisme structural. Soit $\Omega_r = (f_r)_\star \omega_{[0,\infty]}^\kappa$ le faisceau des des formes r-surconvergentes paramétrées par $\mathcal{W}$.

Lemme 6.7. — *Pour tout ouvert affine $\mathcal{W}_I \subset \mathcal{W}$, $\Omega_r(\mathcal{W}_I)$ est un $\mathscr{O}_{\mathcal{W}_I}$-module projectif.*

Démonstration. Sur un ouvert de l'espace $\mathcal{W}_{[0,\infty[}$, c'est démontré dans [**21**], sect. 5.2. Pour un ouvert inclus dans $\mathcal{W}_{[p,\infty]}$, cela résulte de la proposition 6.9. □

On définit sur Ω_r une action de l'opérateur U_p par la règle suivante (pour tout intervalle $I \subset [0, \infty]$) :

$$U_p : \mathrm{H}^0(\mathcal{M}_{r,I}, \omega_I^\kappa) \to \mathrm{H}^0(\mathcal{M}_{r+1,I}, i^\star \omega_I^\kappa) \simeq \mathrm{H}^0(\mathcal{M}_{r+1,I}, \phi^\star \omega_I^\kappa) \overset{p^{-1}\mathrm{Tr}_\phi}{\to} \mathrm{H}^0(\mathcal{M}_{r,I}, \omega_I^\kappa).$$

Cette opérateur est compact. On peut donc définir la série caractéristique $\mathcal{P}$ de U_p agissant sur Ω_r. Cette série caractéristique est à coefficient dans $\mathrm{H}^0(\mathcal{W}, \mathscr{O}_{\mathcal{W}}) = \Lambda$.

Remarque 6.3. — On retrouve là le coro. 12.1 de [**7**] par une autre manière.

De plus, la formation de $\mathcal{P}$ commute au changement de base sur $\mathcal{W}$. En particulier, si $\{\bar{\kappa}_\chi\} \hookrightarrow \mathcal{W}$ est un point du bord, alors $\mathcal{P}|_{\{\bar{\kappa}_\chi\}}$ est la série caractéristique de U_p agissant sur $M^\dagger_{\bar{\kappa}_\chi}$.

L'action de l'algèbre de Hecke H de niveau premier à p se définit comme dans le cas usuel. En appliquant la construction B.3, on obtient une variété spectrale $\mathcal{Z} \to \mathcal{W}$ et une courbe de Hecke $\mathcal{E} \to \mathcal{Z} \to \mathcal{W}$.

Annexe A
Théorie du sous-groupe canonique

La théorie du sous-groupe canonique a été considérée par de nombreux auteurs. Le point de vue adopté est cependant toujours p-adique. Nous reformulons ici la théorie au niveau de généralité dont nous avons besoin, c'est à dire sans supposer que la topologie est p-adique. Nous allons reprendre la méthode expliquée dans [**22**], sect. III.2, qui repose sur la théorie du complexe cotangent d'Illusie.

A.1. Invariant de Hasse et idéal de Hodge. — Si $H \to \operatorname{Spec} R$ est un schéma en groupes, on note $\ell_{H/R}$ son complexe de co-Lie et $\omega_H = \mathrm{H}^0(\ell_{H/R})$ son faisceau conormal ([**20**]). Supposons que R est un anneau de caractéristique p. Soit G un groupe de Barsotti-Tate tronqué sur R. On note F et V les morphismes de Frobenius et Verschiebung. Le complexe de co-Lie de $\mathrm{Ker} V$ est représenté par :

$$[\omega_G \xrightarrow{HW(G)} \omega_{G^{(p)}}]$$

où $HW(G)$ s'appelle la matrice de Hasse-Witt. Soit d la dimension de G. Le déterminant de la matrice de Hasse-Witt est l'invariant de Hasse $\mathrm{Ha}(G) \in (\Lambda^d \omega_G)^{\otimes p-1}$.

Supposons que R est un anneau p-adiquement complet. On note $\mathrm{Hdg}(G)$ et on appelle idéal de Hodge de G l'image inverse dans R de l'idéal $\mathrm{Ha}(G)(\Lambda^d \omega_G)^{\otimes(1-p)} \subset R/p$.

Lemme A.1. — *L'idéal* $\mathrm{Hdg}(G)$ *est localement pour la topologie de Zariski engendré par deux éléments. Supposons que* $p \in \mathrm{Hdg}(G)^2$. *Alors* $\mathrm{Hdg}(G)$ *est un idéal inversible.*

Démonstration. Quitte à remplacer $\operatorname{Spec} R$ par un ouvert de Zariski, on peut supposer que l'idéal $\mathrm{Ha}(G)(\Lambda^d \omega_G)^{\otimes(1-p)} \subset R/p$ est principal. Notons $\tilde{\mathrm{Ha}}$ un relèvement dans R d'un générateur. L'idéal de Hodge vaut alors $(p, \tilde{\mathrm{Ha}})$. Si $p \in \mathrm{Hdg}(G)^2$, alors $p = \tilde{\mathrm{Ha}}u + p^2 v$ pour $u, v \in R$, et donc $p(1 - pv) = \tilde{\mathrm{Ha}}u$. Comme $1 - pv$ est inversible, $\mathrm{Hdg}(G)$ est engendré par $\tilde{\mathrm{Ha}}$. □

A.2. Construction du sous-groupe canonique. — Soit A_0 un anneau intègre et $\alpha \in A_0$ un élément non nul. On équipe A_0 de la topologie α-adique et on suppose que A_0 est α-adiquement complet. On suppose aussi qu'on a un morphisme $\mathbb{Z}_p \to A_0$ continue. Dans la théorie classique, on prend $A_0 = \mathbb{Z}_p$ et $\alpha = p$, mais ici nous considérons une situation plus général. On peut par exemple prendre $A_0 = \mathbb{F}_p[[T]]$ et $\alpha = T$.

Proposition A.1. — *Soit R une A_0-algèbre α-adiquement complète et sans A_0-torsion. Soit $G \to$* $\operatorname{Spec} R$ *un groupe fini et localement libre. Soit $C_1 \subset G_1 = G|_{\operatorname{Spec} R/p}$ un sous-groupe fini localement libre. Soit $L_1 = G_1/C_1$. On suppose qu'il existe un élément $\lambda \in A_0$ tel que $p = \lambda^2 u$ avec u topologiquement nilpotent et la multiplication par λ est homotope* *à 0 sur le complexe de co-Lie $\ell_{L_1/R/pR}$. Alors il existe un sous-groupe fini et plat $C \subset G$ tel que $C|_{\mathrm{Spec}\ R/\frac{p}{\lambda}R} = C_1|_{\mathrm{Spec}\ R/\frac{p}{\lambda}R}$.*

Démonstration. Introduisons les anneaux $B_1 = R/p^2\lambda^{-1}R$ et $B_2 = \{(x,y) \in R/p^2\lambda^{-2}R \times R/pR, x = y \ \in R/p\lambda^{-1}R\}$. On a des augmentations $B_1 \to R/pR$ et $B_2 \to R/pR$ de noyau J_1 et J_2 isomorphes à $R/p\lambda^{-1}$. On a une application diagonale $B_1 \to B_2$ qui induit la multiplication par λ de J_1 vers J_2. En appliquant le thm. 3.2.1 (comme dans le coro. 3.2.2) de [**22**], on peut relever $C_1|_{\mathrm{Spec}\ R/\frac{p}{\lambda}R}$ en un groupe localement libre $C_2 \hookrightarrow G|_{\mathrm{Spec}\ R/p^2\lambda^{-2}R}$. Supposons par récurrence qu'on a construit $C_n \hookrightarrow G|_{\mathrm{Spec}\ R/p^n\lambda^{-n}R}$ qui relève $C_1|_{\mathrm{Spec}\ R/\frac{p}{\lambda}R}$. Soit L_n le conoyau du morphisme $C_n \to G|_{\mathrm{Spec}\ R/p^n\lambda^{-n}R}$. La multiplication par λ dans le complexe de co-Lie $\ell_{L_n/R/p^n\lambda^{-n}R}$ est homotope à 0 modulo $\frac{p}{\lambda}$. On a donc, dans l'anneau des endomorphismes de $\ell_{L_n/R/p^n\lambda^{-n}}$ une homothopie $\lambda \sim \frac{p}{\lambda}v$ pour un endomorphisme v. Il en résulte que $\lambda(1-uv) \sim 0$, mais $1-uv$ est inversible car u est topologiquement nilpotent. Il en résulte que la multiplication par λ est homotope à 0. Considérons alors les anneaux $B_1' = R/p^{n+1}\lambda^{-n}R$ et $B_2' = \{(x,y) \in R/p^{n+1}R\lambda^{-n+1} \times R/p^n\lambda^{-n}R, x = y \ \in R/p^n\lambda^{-n-1}R\}$. On a des augmentations $B_1' \to R/p^n\lambda^{-n}$ et $B_2' \to R/p^n\lambda^{-n}$ de noyau J_1' et J_2' isomorphes à R/p. On a une application diagonale $B_1' \to B_2'$ qui induit la multiplication par λ de J_1 vers J_2. En raisonnant comme au-dessus on construit un relèvement $C_{n+1} \hookrightarrow G|_{\mathrm{Spec}\ R/p^{n+1}\lambda^{-n-1}R}$ de $C_n|_{\mathrm{Spec} R/p^n\lambda^{-n+1}R}$ et donc de $C_1|_{\mathrm{Spec}\ R/\frac{p}{\lambda}R}$. Comme R est $\frac{p}{\lambda}$-adiquement complet, on peut conclure. □

Lemme A.2. — *Soit R une A_0-algèbre α-adiquement complète et sans A_0-torsion. Soit $X \to$ Spec R un schéma tel que $\Omega^1_{X/R}$ est annulé par la multiplication par $\lambda \in A_0$. Soit $a \in A_0$ tel que $a^2 \in \lambda R$, et s_1, s_2 : Spec $R/a^2R \to X$ deux sections telles que $s_1 = s_2$ mod a. Alors $s_1 = s_2 \mod a^2\lambda^{-1}$.*

Démonstration. Posons $s = s_1 \mod a$. L'ensemble des relèvements de s en des sections modulo a^2 est un espace principal homogène sous $\mathrm{Hom}_X(\Omega^1_{X/R}, R/a)$ (où $R/a = a/a^2R$ est vu comme un $\mathscr{O}_X$-module au moyen de la section s). De même, l'ensemble des relèvements modulo $a^2\lambda^{-1}$ de s est un espace principal homogène sous $\mathrm{Hom}_X(\Omega^1_{X/R}, R/a\lambda^{-1})$. L'application $\mathrm{Hom}_X(\Omega^1_{X/R}, R/a) \to \mathrm{Hom}_X(\Omega^1_{X/R}, R/a\lambda^{-1})$ correspond à la restriction des sections de R/a^2 à $R/a^2\lambda^{-1}$, et elle est nulle car λ annule $\Omega^1_{X/R}$. Cela signifie que tous les relèvement à R/a^2 sont égaux dans $R/a^2\lambda^{-1}$. □

Corollaire A.1. — *Soit R une A_0-algèbre α-adiquement complète et sans A_0-torsion. Soit G un groupe de Barsotti-Tate tronqué d'échelon n sur R. Soit $\lambda \in A_0$ tel que $\lambda^2 u = p$ avec u topologiquement nilpotent. Soit $m \leq n$. Supposons que $\lambda \mod p \in \mathrm{Ha}(G)^{\frac{p^m-1}{p-1}}(\Lambda^d\omega_G)^{\otimes(1-p^m)}$. Alors, G possède un sous-groupe canonique fini localement libre H_m et les propriétés suivantes sont vérifiées :*

1. *H_m relève* Ker F^m *modulo $\frac{p}{\lambda}$,*
2. *Pour toute R-algèbre R', α-adiquement complète et sans A_0-torsion,*
$$H_m(R') = \{s \in G[p^m](R'),\ s \mod p\lambda^{-1} \in \mathrm{Ker} F^m\},$$
3. *Soit $L_m = G[p^m]/H_m$. Alors ω_{L_m} est annulé par* $\mathrm{Hdg}(G)^{\frac{p^m-1}{p-1}}$, *et on a des isomorphismes* $\det\ \omega_{L_m} \simeq \det\ \omega_G/\mathrm{Hdg}(G)^{\frac{p^m-1}{p-1}}$.

Remarque A.1. — La seconde propriété caractérise H_m.

Démonstration. Quitte à faire une localisation de Zariski, on peut supposer que le faisceau ω_G est trivial. Soit $G_1 = G|_{R/p}$. Soit KerV^m le conoyau de l'inclusion Ker$F^m \to G_1[p^m]$. Le complexe de co-Lie de KerV^m vaut :

$$[\omega_{G_1} \xrightarrow{\mathrm{HW}(G)^{\frac{p^m-1}{p-1}}} \omega_{G_1^{(p^m)}}].$$

Comme $\mathrm{Ha}(G)^{\frac{p^m-1}{p-1}}$ divise λ, la multiplication par λ est homotope à 0. On peut donc appliquer la proposition A.1. Ceci démontre l'existence de H_m. Soit L_m le conoyau du morphisme $H_m \to G[p^m]$. Comme L_m se réduit sur KerV^m modulo $p\lambda^{-1}$, on obtient que ω_{L_m} est annulé par $\mathrm{Hdg}(G)^{\frac{p^m-1}{p-1}}$ modulo $p\lambda^{-1}$. Il en résulte que $\mathrm{Hdg}(G)^{\frac{p^m-1}{p-1}}\omega_{L_m} \subset \mathrm{Hdg}(G)^{\frac{p^m-1}{p-1}} u\omega_{L_m}$ et le lemme de Nakayama entraîne que ω_{L_m} est annulé par $\mathrm{Hdg}(G)^{\frac{p^m-1}{p-1}}$ et donc aussi par λ.

On a une surjection det $\omega_G \to$ det ω_{L_m}. qui induit un isomorphisme

$$\det\ \omega_G/(\mathrm{Hdg}(G)^{\frac{p^m-1}{p-1}}, p\lambda^{-1}) \to \det\ \omega_{L_m}.$$

Comme $p\lambda^{-1} \in \mathrm{Hdg}(G)^{\frac{p^m-1}{p-1}}$ on obtient l'isomorphisme det $\omega_{L_m} \simeq$ det $\omega_G/\mathrm{Hdg}(G)^{\frac{p^m-1}{p-1}}$.

Démontrons la formule $H_m(R') = \{s \in G[p^m](R'),\ s \mod p\lambda^{-1} \in \mathrm{Ker}F^m\}$. Il résulte du lemme A.2 que si $s \in L_m(R')$ et la section identité modulo $p\lambda^{-1}$, elle est la section identité modulo $p^2\lambda^{-3} = \frac{p}{\lambda}u$. En répétant l'argument, on en déduit que c'est la section identité modulo $\frac{p}{\lambda}u^r$ pour tout r et donc la section identité.

□

Remarque A.2. — Si R est une $\mathbb{F}_p$-algèbre la théorie est bien sûre triviale, G possède toujours un sous-groupe canonique d'ordre n : le noyau de F^n. On le retrouve en appliquant la proposition avec $\lambda = 0$ et $u = 0$.

Corollaire A.2. — *Soit R une A_0-algèbre α-adiquement complète et sans A_0-torsion. Soit $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Soit G un groupe de Barsotti-Tate sur R, de dimension d et hauteur h. Soit $m \in \mathbb{N}_{\geq 0}$. Supposons que $p \in \mathrm{Hdg}(G)^{p^{m+1}}$.*

1. *G possède un sous-groupe canonique H_n d'échelon n pour tout $n \leq m$, et on a $H_n \subset H_{n'}$ si $n \leq n'$.*
2. *H_n est localement libre de rang p^{nd} et il relève le groupe* KerF^n *modulo* $p\mathrm{Hdg}(G)^{-\frac{p^n-1}{p-1}}$.
3. *Soit $G' = G/H_n$. Alors* $\mathrm{Hdg}(G') = \mathrm{Hdg}(G)^{p^n}$, *$G'$ possède un sous-groupe canonique H'_{m-n}, d'échelon $m-n$, et on a une suite exacte :*

$$0 \to H_n \to H_m \to H'_{m-n} \to 0.$$

4. *Le faisceau conormal $\omega_{G[p^n]/H_n}$ est annulé par* $\mathrm{Hdg}(G)^{\frac{p^n-1}{p-1}}$ *et* det $\omega_{G[p^n]/H_n} \simeq$ det $\omega_{G[p^n]}/\mathrm{Hdg}(G)^{\frac{p^n-1}{p-1}}$.
5. *Soi G^D le dual de G. Alors* $\mathrm{Hdg}(G) = \mathrm{Hdg}(G^D)$. *Pour tout $n \leq m$, l'accouplement $G[p^n] \times G[p^n]^D \to \mu_{p^n}$ induit une identification $H_n(G) \simeq H_n(G^D)^{\perp}$.*
6. *Supposons de plus que $\alpha \in$* $\mathrm{Hdg}(G)$. *Alors $G[p^n]/H_n$ est étale sur* Spec $R[1/\alpha]$, *localement isomorphe à $(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})^{h-d}$.*

Remarque A.3. — Le caractère étale de $G[p^m]/H_m$ n'est pas complètement trivial puisque p n'est pas forcément inversible dans $R[\frac{1}{\alpha}]$. Il suffit de penser à la situation où $A_0 = \mathbb{F}_p[[T]]$, $\alpha = T$.

Démonstration. Quitte à faire une localisation Zariski, on peut supposer que $\mathrm{Hdg}(G)$ est principal engendré par $\tilde{\mathrm{Ha}}$. On pose $\lambda = \tilde{\mathrm{Ha}}^{\frac{p^m-1}{p-1}}$, $u = p\tilde{\mathrm{Ha}}^{-2\frac{p^m-1}{p-1}}$. On vérifie que u est topologiquement nilpotent car $p^{m+1} > 2\frac{p^m-1}{p-1}$.

L'existence de H_n pour $n \leq m$, l'inclusion $H_n \subset H_m$ et la propriété de relèvement du noyau de Frobenius résultent du corollaire A.1.

Si $G' = G/H_n$, on a $G' = G^{(p^n)}$ modulo $p\tilde{\mathrm{Ha}}^{-\frac{p^n-1}{p-1}}$ et on a donc l'égalité des idéaux :

$$(\mathrm{Hdg}(G'), p\tilde{\mathrm{Ha}}^{-\frac{p^n-1}{p-1}}) = (\mathrm{Hdg}(G)^{p^n}, p\tilde{\mathrm{Ha}}^{-\frac{p^n-1}{p-1}})$$

Vérifions alors que $\mathrm{Hdg}(G')$ est engendrée par $\tilde{\mathrm{Ha}}^{p^n}$. Soit $x \in \mathrm{Hdg}(G')$ et $u \in R$ tels que $x = \tilde{\mathrm{Ha}}^{p^n} + up\tilde{\mathrm{Ha}}^{-\frac{p^n-1}{p-1}}$. Alors $x = \tilde{\mathrm{Ha}}^{p^n}(1 + up\tilde{\mathrm{Ha}}^{-\frac{p^{n+1}-1}{p-1}})$. Or $p\tilde{\mathrm{Ha}}^{-\frac{p^{n+1}-1}{p-1}}$ est topologiquement nilpotent, donc $\tilde{\mathrm{Ha}}^{p^n} \in \mathrm{Hdg}(G')$ et c'est clairement un générateur. Il en résulte que $\mathrm{Hdg}(G')$ possède un sous-groupe canonique d'échelon $m-n$. On a une application évidente $H_m \to H'_{m-n}$ d'après la propriété 2 du corollaire A.1. En comparant les ordres de H_n, H_m et H'_{n-m}, on obtient la suite exacte annoncée. Soit G^D le dual de G. On a $\mathrm{Hdg}(G) = \mathrm{Hdg}(G^D)$ d'après [**12**]. Considérons le groupe $H_n(G)^\perp \subset G^D[p^n]$. Le point 2. du corollaire A.1 montre que $H_n(G)^\perp \subset H_n(G^D)$. Comme ces deux groupes ont même rang, ils sont égaux. Vérifions le dernier point. Posons $L_m = G[p^m]/H_m$. Comme ω_{L_m} est de α-torsion, il en résulte que L_m est étale sur Spec $R[\frac{1}{\alpha}]$. La dernière propriété est vérifiée sur une partie ouverte et fermé de Spec $R[\frac{1}{\alpha}]$. Soit x un idéal de Spec $R[\frac{1}{\alpha}]$. Nous allons construire un morphisme $R/x \to \mathcal{O}_K$ où $\mathcal{O}_K$ est un anneau de valuation complet pour une valuation de rang 1, tel que l'image de α est une pseudo-uniformisante. Soit x' un idéal maximal de Spec R qui est une spécialisation de x. Remarquons que $\alpha \in x$. Soit A un sous anneau de valuation de $\mathrm{Frac}(R_{x'}/x)$ qui domine $R_{x'}/x$. Cela nous fournit une valuation v sur $R[\frac{1}{\alpha}]$. D'après [**15**], prop. 2.6 (appliquée à $I = R^{00}$) et thm. 3.1, il existe une spécialisation $v' \in \mathrm{Spa}(R[\frac{1}{\alpha}], \tilde{R})$ de v, où $\tilde{R}$ est la normalisations de R dans $R[\frac{1}{\alpha}]$. Le support dans Spec $R[\frac{1}{\alpha}]$ de v' est une spécialisation de x. D'autre part, comme $R[\frac{1}{\alpha}]$ est une algèbre de Tate, v' admet une générisation de rang 1. On a donc un morphisme $R \to \mathcal{O}_K$ où K est un corps valué complet pour une valuation de rang 1 et $\mathcal{O}_K$ est son anneau d'entiers. Si K est un corps de caractéristique p, $L_m|_K = \mathrm{Ker} V^m$ et $L_m|_K$ est bien localement isomorphe à $(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})^{h-d}$. Sinon, K est un corps local d'inégale caractéristique, la théorie classique (voir [**12**] par exemple), entraîne que $L_m|_K$ est localement isomorphe à $(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})^{h-d}$. Il en résulte que L_m est localement libre comme $\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$-module en tout point fermé de Spec $R[\frac{1}{\alpha}]$ et donc sur Spec $R[\frac{1}{\alpha}]$ tout entier. □

A.3. Sous-groupes canoniques et application de Hodge-Tate. — Dans [**12**], le sous-groupe canonique est construit comme noyau de certaines applications de Hodge-Tate. Faisons le lien avec cette approche.

Rappelons d'abord un résultat classique. Soit R une $\mathbb{F}_p$-algèbre et G un groupe de Barsotti-Tate d'échelon 1, de hauteur h et dimension d. On a alors une suite exacte de schémas en groupes (voir par exemple [**12**], sect. 2.1.2.) :

$$0 \to \mathrm{Ker} F \to G \overset{\mathrm{HT}}{\to} \underline{\omega}_{G^D} \overset{F-\mathrm{HW}(G^D)}{\longrightarrow} \underline{\omega}_{G^D}^{(p)} \to 0$$

Ici, $\underline{\omega}_{G^D}$ et $\underline{\omega}_{G^D}^{(p)}$ sont les schémas en groupes vectoriels associés aux faisceaux localement libres ω_{G^D} et $\omega_{G^D}^{(p)}$. Ils sont localement pour la topologie de Zariski isomorphes à $\mathbb{G}_a^{h-d}$. De plus, HT désigne l'application de Hodge-Tate

On se place à présent sous les hypothèses du corollaire A.1 : A_0 est une $\mathbb{Z}_p$-algèbre intègre, $\alpha \in A_0 \setminus \{0\}$, A_0 est α-adiquement complète et le morphisme structural $\mathbb{Z}_p \to A_0$ est continu. On se donne R une A_0-algèbre α-adiquement complète et sans A_0-torsion et G un groupe de Barsotti-Tate sur R d'échelon 1, de hauteur h et dimension d. Soit $\lambda \in A_0$ tel que $\lambda^2 u = p$ avec u topologiquement nilpotent. Supposons que $\lambda \mod p \in \mathrm{Ha}(G)(\Lambda^d \omega_G)^{\otimes(1-p)}$. Soit H_1 le sous-groupe canonique d'échelon 1.

Proposition A.2. — *Pour tout R-algèbre R', α-adiquement complète et sans A_0-torsion, on a une suite exacte :*

$$0 \to H_1(R') \to G[p](R') \stackrel{\mathrm{HT}}{\to} \omega_{G^D} \otimes_R R'/p\lambda^{-1}R'.$$

Démonstration. On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} G[p](R') & \longrightarrow & \omega_{G^D} \otimes_R R'/p\mathrm{Hdg}(G)^{-1}R' \\ \downarrow & & \downarrow \\ G[p](R'/p\lambda^{-1}) & \longrightarrow & \omega_{G^D} \otimes_R R'/p\lambda^{-1}R' \end{array}$$

Soit $x \in G[p](R')$. Alors $x \in H_1(R')$ si et seulement si $x \mod p\lambda^{-1} \in \mathrm{Ker}F$ d'après le corollaire A.1. On vient de voir que $x \mod p\lambda^{-1} \in \mathrm{Ker}F$ si et seulement si $\mathrm{HT}(x) \mod p\lambda^{-1} = 0$. □

On suppose à présent que $\alpha = p$, que R est normal et que $p \in \mathrm{Hdg}(G)^{p^2}$. On suppose de plus que $G/H_1(R) = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{h-d}$. On considère la puissance extérieure maximale de l'application de Hodge-Tate :

$$\det G/H_1(R) \stackrel{\det \mathrm{HT}}{\to} \det \omega_{G^D} \otimes_R R/p\mathrm{Hdg}(G)^{-1}R = \det\ \omega_{(G/H_1)^D} \otimes_R R/p\mathrm{Hdg}(G)^{-1}R.$$

Soit P une base du $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel $\det G/H_1(R)$. Soit I l'idéal de $R/p\mathrm{Hdg}(G)^{-1}$ défini par :

$$\det \mathrm{HT}(P). \det\ \omega_{G^D} \otimes_R R/p\mathrm{Hdg}(G)^{-1}R = I(\det\ \omega_{G^D} \otimes_R R/p\mathrm{Hdg}(G)^{-1}R).$$

On note $\mathrm{HdgT}(G)$ et on appelle idéal de Hodge-Tate de G l'image inverse de I dans R.

Proposition A.3. — *L'idéal* $\mathrm{HdgT}(G)$ *est inversible et on a l'égalité des idéaux* $\mathrm{HdgT}(G)^{p-1} = \mathrm{Hdg}(G)$.

Démonstration. Comme R est normal, on se ramène facilement au cas où R est un anneau de valuation complet pour une valuation de rang 1 et p est une pseudo-uniformisante. C'est alors une conséquence de [**12**], prop. 7. □

Annexe B
Théorie spectrale

Nous étendons la théorie spectrale de Coleman afin de pouvoir l'appliquer au dessus de l'espace des poids $\mathcal{W}$. Le point nouveau essentiel est l'existence de factorisations locales des séries de Fredholm sur un espace adique général. Seul le cas des espaces rigides avait été étudié auparavant. Fixons (A, A^+) une $\mathbb{Z}_p$-algèbre de Tate. Notons $A_0 \subset A^+$ un anneau de définition et fixons $\alpha \in A_0$ tel que $A = A_0[1/\alpha]$ et (α) est un idéal de définition dans A_0. Nous supposons de plus que A_0 est noethérien, et donc (A, A^+) est faisceautique d'après [**14**], thm. 2.5.

B.1. Série de Fredholm et factorisation. — Dans ce numéro nous introduisons les séries de Fredholm, leurs variétés spectrales et établissons leur factorisations locales.

Définition B.1. — *Une série formelle* $F = \sum_{n\geq 0} a_n T^n \in A[[T]]$ *est appelée série de Fredholm si :*

1. $a_0 = 1$,
2. *Pour tout* $r \in \mathbb{Z}$, $a_n \alpha^{rn} \to 0$ *quand* $n \to \infty$.

Soit $\mathbb{A}^1$ la droite affine sur $\mathrm{Spa}(A, A^+)$. C' est la réunion croissante des boules affinoides $\{\mathbb{B}_n = \mathrm{Spa}(A\langle\alpha^n T\rangle, A^+\langle\alpha^n T\rangle)\}_{n\in\mathbb{N}}$ d'équation $|\alpha^n T| \leq 1$. Plus généralement, pour tout rationnel positif $\lambda = \frac{r}{s}$, on note $\mathbb{B}_\lambda$ l'ouvert affinoide de $\mathbb{A}^1$ d'équation $|T^s| \leq |\alpha^{-r}|$. Soit F un série de Fredholm. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut définir le fermé $V(F)_n \subset \mathbb{B}_n$ où $V(F)_n = \mathrm{Spa}(C_n, C_n^+)$ avec $C_n = A\langle\alpha^n T\rangle/(F)$ et C_n^+ est la normalisation de l'image de $A^+\langle\alpha^n T\rangle$ dans C_n. La variété spectrale $V(F)$ est le fermé de $\mathbb{A}^1$ qui vaut la réunion des $V(F)_n$. On a un morphisme structural $w : V(F) \to \mathrm{Spa}(A, A^+)$. La construction de la variété spectrale commute au changement de base.

Rappelons quelques définitions tirées de [**16**], sect. 1.3, 1.4. et 1.5. Un morphisme $(C, C^+) \to (B, B^+)$ d'algèbres affinoides est fini si B est fini sur C et B^+ est la clôture intégrale de C^+ dans B. Il est fini et plat si B est de plus plat sur C. Un morphisme $f : X \to Y$ d'espaces adiques est fini et plat si tout point $y \in Y$ possède un voisinage affine $U = \mathrm{Spa}(C, C^+)$ tel que $f^{-1}(U) = \mathrm{Spa}(B, B^+)$ est affine et $(C, C^+) \to (B, B^+)$ est un morphisme fini et plat. Un morphisme localement de type fini d'espaces adiques analytiques $f : X \to Y$ est localement quasi-fini si ses fibres sont discrètes. Enfin, un morphisme localement de type fini quasi-séparé d'espaces adiques analytiques est partiellement propre si il vérifie le critère valuatif de propreté de [**16**], coro. 1.3.9 (voir aussi lem. 1.3.10).

Lemme B.1. — *Supposons que A est un corps. Il existe alors une suite strictement croissante tendant vers l'infini* $(\lambda_i) \in \mathbb{Q}_{>0}^{\mathbb{N}}$ *telle que* $V(F) \cap \mathbb{B}_{\lambda_i}$ *soit fini et plat sur* $\mathrm{Spa}(A, A^+)$.

Démonstration. Soit A^0 l'anneau des éléments à puissance bornée dans A et A^{00} l'idéal des éléments topologiquement nilpotents. On a $A^{00} \subset A^+ \subset A^0$. Soit $|.|$ la norme de rang 1 sur A correspondant à A^0 et v la valuation associée. On normalise v par $v(\alpha) = 1$. Soit $\{s_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ les pentes du polygone de Newton de F, sans multiplicité, rangées par ordre strictement croissant. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $\lambda_n = \frac{l}{m}$ un rationnel tel que $s_n < \lambda_n < s_{n+1}$. Rappelons que $\mathbb{B}_{\lambda_n} \subset \mathbb{A}^1$ est l'ouvert rationnel d'équation $|\alpha^l T^m| \leq 1$. Nous allons montrer que $\mathbb{B}_{\lambda_n} \cap V(F) \to S$ est fini. Quitte à faire une extension finie de A, ce qui est loisible d'après [**16**], lem. 1.4.9, on peut supposer qu'il existe $\beta \in A$ tel que $v(\beta) = \lambda_n$. On a alors $\mathbb{B}_\lambda = \mathrm{Spa}(A\langle\beta T\rangle, A^+\langle\beta T\rangle)$. Soit la factorisation de F en $F = PU$, où P est le polynôme de polygone de Newton de pentes strictement inférieures à λ_n et U est la série de Fredholm de polygone de Newton de pentes strictement supérieures à λ_n. Dans une clôture algébrique $\bar{A}$ de A, on a $P(T) = \prod(1 - a_i T)$ avec $v(a_i) < \lambda_n$, donc $P(T) = \prod_i \beta^{-1} a_i \prod_i (a_i^{-1}\beta - \beta T)$. Posons $Q(T) = \prod(a_i^{-1}\beta - \beta T) \in A^{00}\langle\beta T\rangle$. Introdusions aussi la variable $S = \beta T$. On a alors $A\langle\beta T\rangle/(F(T)) = A\langle\beta T\rangle/(Q(T)) = A\langle S\rangle/(Q(S))$ et $\big(A\langle\beta T\rangle/F(T)\big)^+ = A^+\langle S\rangle/(Q(S))$ et ces algèbres sont finies sur A et A^+ respectivement. $\square$

Théorème B.1. — *Le morphisme* $V(F) \to \mathrm{Spa}(A, A^+)$ *est localement quasi-fini, plat et partiellement propre. Pour tout* $x \in V(F)$ *et* $w(x) \in \mathrm{Spa}(A, A^+)$, *il existe un voisinage* U *de* x *dans* $V(F)$ *tel que* $\overline{\{x\}} \subset U$ *et un voisinage* V *de* $w(x)$ *dans* $\mathrm{Spa}(A, A^+)$ *tel que* $w(U) \subset V$ *et le morphisme* $w|_U : U \to V$ *est fini et plat.*

Démonstration. Le morphisme $V(F) \to \mathrm{Spa}(A, A^+)$ est localement de type fini et quasi-séparé par construction. D'autre part, il est localement quasi-fini et vérifie le critère valuatif de propreté ([**16**], coro. 1.3.9) d'après le lemme B.1. D'après la proposition 1.5.6 de [**16**], pour tout $x \in V(F)$ et $w(x) \in \mathrm{Spa}(A, A^+)$, il existe un voisinage U de x dans $V(F)$ tel que $\overline{\{x\}} \subset U$ et un voisinage V de $w(x)$ dans $\mathrm{Spa}(A, A^+)$ tel que le morphisme $w|_U : U \to V$ est fini. Par ailleurs, pour tout n, on voit comme dans [**5**], Part I, lem. 4.1, que le morphisme $V(F)_n \to \mathrm{Spa}(A, A^+)$ est plat. D'autre part $U \hookrightarrow V(F)_n|_V$ pour n suffisamment grand et comme U est propre sur V, U est ouvert et fermé dans $V(F)_n$, donc c'est une union de composantes connexes de $V(F)_n$. Par conséquent, le morphisme $U \to V$ est plat. □

Corollaire B.1. — *Soit $x \in V(F)$, U et V comme dans le théorème. On suppose (il suffit de rapetisser V) que $U = \mathrm{Spa}(C, C^+)$, $V = \mathrm{Spa}(B, B^+)$, et que U est de rang constant d sur V. Alors la série de Fredholm F possède une factorisation à coefficient dans B : $F = QS$ où $Q = 1 + b_1T + \cdots + b_dT^d \in B[T]$, $b_d \in B^\times$, S est une série de Fredholm à coefficient dans B première à Q et $C = B[T]/Q(T)$.*

Démonstration. Comme U est un fermé de $V(F)_n$ pour n assez grand, on possède une surjection $B < \alpha^n T > \to C$. Soit $L \in B[T]$ le polynôme caractéristique de l'image T dans C. Le composé $B[T]/(L) \to B < \alpha^n T > /(L) \to C$ est un morphisme de B-modules de type fini. La topologie de B induit sur ces modules une topologie canonique ([**14**], p. 524). La topologie sur C est aussi la topologie quotient induite par la surjection $B < \alpha^n T > \to C$ d'après la proposition B.1. Le morphisme $B[T]/(L) \to C$ est donc d'image dense et comme il est strict ([**14**], lem. 2.3), il est surjectif. En comparant les rangs, on déduit que ce morphisme est un isomorphisme. On a une factorisation $F = LM$ dans $B < \alpha^n T >$ pour tout n assez grand. Il en résulte que $L(0) \in B^\times$. Posons alors $Q(T) = L(0)^{-1}L(T)$. On a $F = QS$ avec $S = L(0)M$. De plus Q et S sont premiers entre eux car U est ouvert et fermé dans $V(F)_n$ pour tout n assez grand. □

B.2. Endomorphismes complètement continus d'un module de Banach. —

B.2.1. Algèbres de Tate et algèbres de Banach. — On rappelle que A est une algèbre de Tate, $A_0 \subset A$ un anneau de définition, et que $\alpha \in A_0$ est une unité topologiquement nilpotente. Nous supposons aussi que A_0 est noethérien.

On peut munir A d'une norme $|.| : A \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ en posant $|a| = \inf_{n, \alpha^n a \in A_0} p^n$. On vérifie immédiatement les propriétés suivantes :

1. Pour tout $a, b \in A$, $|a + b| \leq \sup\{|a|, |b|\}$,
2. Pour tout $a, b \in A$, $|ab| \leq |a||b|$,
3. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et $a \in A$, $|\alpha^n a| = p^{-n}|a|$,
4. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $|a| \leq p^{-n} \Leftrightarrow a \in \alpha^n A_0$.

En particulier, la topologie induite par la norme sur A est sa topologie d'origine.

B.2.2. Modules de Banach. — On dit qu'un A-module topologique M est un module de Banach si il possède un sous-A_0 module M_0 tel que $M = M_0[1/\alpha]$ et M_0 est (α)-adiquement complet et séparé. Si M est un A-module de Banach, alors on peut le munir d'une norme $|.| : M \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ en posant : $|m| = \inf_{n, \alpha^n M \in M_0} p^n$. Cette norme nous redonne la topologie de M. On note $Ban(A)$ la catégorie qui a pour objets les A-modules de Banach et pour morphismes les applications A-linéaires continues.

Le théorème de l'application ouverte est valable dans ce contexte.

Proposition B.1. — *Soit $f : M \to N$ une application A-linéaire continue surjective entre deux A-modules de Banach. Alors f est ouverte.*

Démonstration. Soit M_0 (resp. N_0) un sous A_0 module de M (resp. N) tel que M_0 (resp. N_0) est α-adiquement complet et $M = M_0[1/\alpha]$ (resp. $N = N_0[1/\alpha]$). D'après le théorème de Baire, il existe n, $\alpha^n N_0 \subset \overline{f(M_0)}$. Soit $v \in \alpha^n N_0$. On peut donc trouver $x_1 \in M_0$ tel que $f(x_1) - v \in \alpha^{2n} N_0$. Posons $v_2 = \alpha^{-n}(f(x_1) - u) \in \alpha^n N_0$. On peut alors trouver $x_2 \in M_0$ tel que $f(x_2) - v_2 \in \alpha^{2n} N_0$. En répétant, on construit ainsi une suite $(x_i)_{i \geq 1}$ telle que $f(\sum_{i=1}^k \alpha^{(i-1)n} x_i) - v \in \alpha^{(k+1)n} N_0$. Posons donc $x = \sum_{i=1}^\infty \alpha^{(i-1)n} x_i$. Alors $f(x) = v$ et donc $\alpha^n N_0 \subset f(M_0)$. □

Rappelons également que d'après [**14**], lem. 2.3, la catégorie des A-modules de type fini est une sous-catégorie pleine de la catégorie $Ban(A)$.

Proposition B.2. — *Tout A-module de type fini M possède une unique topologie qui en fait un A-module de Banach. Tout morphisme $f : M \to N$ entre deux A-modules de type fini est continue, $f(M)$ est fermé dans N, et le morphisme induit $M \to f(M)$ est ouvert.*

Exemple 2. — Soit I un ensemble. On note $c_A(I)$ le A-module des fonctions $f : I \to A$ qui vérifient $\lim_{i\to\infty} f(i) = 0$. On l'équipe de la norme supremum $|f| = \sup_{i\in I} |f(i)|$. Alors $c_A(I)$ est un module de Banach. On notera $e_i \in c_A(I)$ la fonction caractéristique de $i \in I$. Les éléments $(e_i)_{i\in I}$ forment une base topologique de $c_A(I)$.

On dit qu'un A-module de Banach M est orthonormalisable si il existe un ensemble I et un homéomorphisme : $c_A(I) \to M$. On vérifie facilement que tout module de Banach est un quotient d'un module orthonormalisable. On dit qu'un A-module de Banach M est projectif si c'est un facteur direct d'un A-module orthonormalisable. Un A-module de Banach est projectif si et seulement si il vérifie la propriété universelle suivante :

Tout diagramme de morphismes dans $Ban(A)$:

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r] & N \arrow[r] & 0 \\ & M \arrow[u] & \end{tikzcd}$$

peut être complété en un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r] & N \arrow[r] & 0 \\ & M \arrow[u] \arrow[ul] & \end{tikzcd}$$

On déduit alors facilement le corollaire suivant :

Corollaire B.2. — *Soit $0 \to M_0 \to M_1 \to \cdots \to M_n \to 0$ une suite exacte longue dans $Ban(A)$. Si $M_1, ..., M_n$ sont projectifs, alors M_0 est projectif.*

B.2.3. Morphismes complètements continus. — Soit $M, N \in Ban(A)$. Soit $\mathrm{Hom}_A(M,N)$ le A-module des endomorphismes continus. C'est naturellement un A-module de Banach pour la convergence uniforme. Munissons par exemple M et N de deux normes $|.|_M$ et $|.|_N$. Alors la topologie sur $\mathrm{Hom}_A(M,N)$ est celle induite par la norme $|f| = \sup_{m\in M\setminus\{0\}} \frac{|f(m)|_N}{|m|_M}$. On dit qu'un élément $f \in Ban(A)$ est de rang fini si $Im(f)$ est un sous A-module de type fini de N. On dit qu'un élément $f \in Ban(A)$ est complètement continu si il est dans l'adhérence des opérateurs de rang fini.

Supposons que $M = c_A(I)$ et $N = c_A(J)$ sont deux modules orthonormalisables. Soit $f \in \mathrm{Hom}_A(M,N)$. On note $Mat(f) = (a_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ la matrice de f dans les bases topologiques canoniques $(e_i)_{i\in I}$ et $(e'_j)_{j\in J}$ de $c_A(I)$ et $c_A(J)$. Concrètement, on a $f(e_i) = \sum_{j\in J} a_{j,i} e'_j$. La proposition suivante se démontre exactement comme [**5**], prop. 2.4 :

Proposition B.3. — *L'opérateur f est complètement continu si et seulement si les colonnes de $Mat(f)$ tendent uniformément vers 0 : $lim_{j\to\infty} \sup_{i\in I} |a_{i,j}| = 0$.*

B.2.4. Déterminant de Fredholm des endomorphismes complètement continus. — Soit $M \in Ban(A)$ et f un endomorphisme complètement continu. Supposons que M est orthonormalisable et choisissons un isomorphisme $c_A(I) \simeq M$. Soit $Mat(f) = (a_{i,j})$ la matrice de f dans cette base. Relativement à cette base, on peut calculer le déterminant de Fredholm (on dit aussi série caractéristique) :

$$\det(1 - Xf|M) = \lim_{J\subset I \text{ fini}} \det\big(1 - X(a_{i,j})_{(i,j)\in J\times J}\big).$$

On vérifie exactement comme dans [**5**], coro. 2.6, que cette définition est indépendante de la base choisie. On voit également que $\det(1 - Xf)$ est une série de Fredholm.

On peut définir la série caractéristique de f en supposant seulement que M est projectif comme expliqué page 19 de [**5**] : Soit $N = M \oplus Q$ un module orthonormalisable. On prolonge f en un endomorphisme $\tilde{f} = f \oplus 0$ de N. La série caractéristique de f est alors la série caractéristique de $\tilde{f}$.

B.2.5. Théorie de Riesz. — Soit M un module de Banach projectif et f un endomorphisme compact. On note $F(X)$ son déterminant de Fredholm. Supposons qu'on a une factorisation $F(X) = Q(X)S(X)$ de la série de Fredholm en produit de deux séries de Fredholm premières entre elles. On suppose de plus que Q est un polynôme de degré d, de coefficient dominant inversible. On note $Q^\star(X) = X^d Q(X^{-1})$ le polynôme réciproque.

Théorème B.2. — *Il existe une unique décomposition $M = M(Q) \oplus N(Q)$ où $M(Q)$ est un A-module projectif de rang d et $Q^\star(f)$ est nul sur $M(Q)$ et inversible sur $N(Q)$.*

La première partie du théorème résulte du théorème A4.3 de [**7**]. Pour vérifier la nullité de $Q^\star(f)$ sur $M(Q)$ on raisonne comme dans la démonstration de [**5**], thm. 3.3.

B.3. Construction de variétés de Hecke. — Dans cette section nous allons rappeler brièvement comment on construit des variétés de Hecke (voir [**7**], sect. A et [**5**], part I, const. 5.7). Soit M un A-module de Banach projectif, H une algèbre commutative d'endomorphismes continus A-linéaires de A et $U \in H$ un opérateur compact.

Soit F le déterminant de Fredholm de U agissant sur M. Soit $Z = V(F) \subset \mathbb{A}^1_{\mathrm{Spa}(A,A^+)}$ la variété spectrale. D'après le corollaire B.1, pour tout point $x \in Z$, on possède un voisinage U fini et plat sur son image $w(U)$ dans l'espace des poids. Au dessus de $w(U)$, on a une factorisation $F = QS$ où Q est un polynôme et S une série de Fredholm première à Q et $U = V(Q) \subset Z_{|w(U)}$. D'après le théorème B.2 on a une décomposition $M = M(Q) \oplus N(Q)$ où $M(Q)$ est l'espace caractéristique associé à Q. Il possède naturellement une structure de $\mathscr{O}_Z(U)$-module. On définit un faisceau cohérent $\mathscr{M}$ sur Z par $\mathscr{M}(U) = M(Q)$. On note $\mathscr{O}_E$ la $\mathscr{O}_Z$-algèbre cohérente engendré par H dans $\mathrm{End}_Z(\mathscr{M})$. On note $E \to Z$ l'espace adique associé à $\mathscr{O}_E$. C'est la variété de Hecke associée à (M, H, U). La proposition suivante résume la construction et les propriétés de E et Z.

Proposition B.4. — *Le morphisme $Z \to \mathrm{Spa}(A, A^+)$ est localement quasi fini, plat et partiellement propre. En particulier, localement sur Z et $\mathrm{Spa}(A, A^+)$, il est fini et plat. On possède un faisceau cohérent d'espaces propres généralisés $\mathscr{M}$ sur $\mathscr{O}_Z$ et $\mathscr{O}_E$ agit fidèlement sur $\mathscr{M}$. Le morphisme $E \to Z$ est fini et sans torsion.*

Références

[1] F. Andreatta, A. Iovita et G. Stevens, *Overconvergent modular sheaves and modular forms*, Israel J. Math. **201** (2014), no. 1, 299-359.

[2] J. Bergdall et R. Pollack, *Arithmetic propserties of Fredholm series for p-adic modular forms*, prépublication 2015.

[3] L. Berger et P. Colmez, *familles de représentations de de Rham et monodromie p-adique*, Astérisque **319** (2008), 303-337.

[4] P. Berthelot, *Cohomologie rigide et cohomologie rigide à support propre*, Première partie, prépublication 96-03, 1996, disponible sur `perso.univ-rennes1.fr/pierre.berthelot/`.

[5] K. Buzzard, *Eigenvarieties*, Proceedings of the LMS Durham conference on *L-functions and arithmetic geometry*, 2004.

[6] K. Buzzard et L. Kilford, *the* 2*-adic eigencurve at the boundary of the weight space*, Compositio Math. **141** (2005), 605-619.

[7] R. Coleman, *p-adic Banach spaces and families of modular forms*, Invent. Math. **127** (1997), 417-479.

[8] R. Coleman, *The Spectral Halo*, notes 2014.

[9] R. Coleman and B. Mazur, *The eigencurve*, Galois representations in *arithmetic algebraic geometry (Durham, 1996)*, vol. **254** of London Math. Soc. Lect. Note Ser. 1-113. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998.

[10] B. Conrad, *Irreducible components of rigid spaces*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **49** (1999), 473-541.

[11] L. Fargues, *La Filtration de Harder-Narasimhan des schémas en groupes finis et plats*, J. Reine Angew. Math. **645** (2010), 1ñ39.

[12] L. Fargues, *Le sous-group canonique des groupes de Barsotti-Tate tronqués déchelon quelconque*. Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. **44** (2011), 905-961.

[13] U. Hartl et R. Pink, *Vector bundles with a Frobenius structure on the punctured unit disc*, Compositio Math. **140** (2004) 689-716.

[14] R. Huber, *A generalization of formal scheme and rigid analytic varieties*, Math. Z. **217** (1994), 513-551.

[15] R. Huber, *Continuous valuations*, Math. Z. **212** (1993), 455-477.

[16] R. Huber, *étale cohomology of rigid analytic varieties and adic spaces*, Aspects of Math. **E30**, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1996.

[17] N. Katz, *P-adic properties of modular schemes and modular forms*, Modular functions of one variable III, SLN, **350**, 69-190.

[18] R. Liu, D. Wan et L. Xiao, *Eigencurve over the boundary of the weight space*, prépublication 2015.

[19] W. Lütkebohmert, *Der Satz von Remmert-Stein in der nichtarchimedischen Funktionentheorie*, Math. Z. **139** (1974), 69 - 84.

[20] W. Messing, *The Crystals Associated to Barsotti-Tate Groups : with Applications to Abelian Schemes*, Lecture Notes in Mathematics **264**, 1972.

[21] V. Pilloni, *Formes modulaires surconvergentes*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **63** (2013), 219-239 .

[22] P. Scholze, *On torsion in the cohomology of locally symmetric varieties*, preprint 2014.

[23] J-P. Serre, *Endomorphismes complètement continus des espaces de Banach p-adiques*. Publications Mathématiques de l'IHES **12** (1962), p. 69-85.

[24] J. Tate, *p-divisible groups*, Proc. Conf. Local Fields, 1966, 158-183, Springer, Berlin.

[25] P. Valabrega, *A few theorem on completion of excellent ring*, Nagoya Math. Journal, Vol. 61(1976), 127-133.

[26] A. Wiles, *On ordinary λ-adic representations associated to modular forms*, Invent. Math. **94** (1988), 529-573.

Fabrizio Andreatta
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA "FEDERIGO ENRIQUES",
UNIVERSITÀ STATALE DI MILANO, VIA C. SALDINI 50, 20133, ITALIA
fabrizio.andreatta@unimi.it

Adrian Iovita
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA PURA ED APPLICATA,
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA, VIA TRIESTE 63, PADOVA 35121, ITALIA
and
DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND STATISTICS,
CONCORDIA UNIVERSITY 1455 DE MAISONNEUVE BLVD., MONTREAL, H3G 1MB CANADA
adrian.iovita@concordia.ca

Vincent Pilloni
UNITÉ DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES
ÉCOLE NORMAL SUPÉRIEURE DE LYON
46 ALLÉE D'ITALIE 69
364 LYON CEDEX 07 FRANCE
vincent.pilloni@ens-lyon.fr

Fabrizio, Adrian and Vincent